Modelli di qualità fluviale

- Le equazioni componenti sono le leggi dinamiche che regolano l'andamento delle variabili lungo il tronco fluviale.

- Sono basate sul principio di conservazione della massa applicato di volta in volta ai diversi considerati per descrivere il fenomeno.

Equazione di bilancio di massa

- Approccio continuo: ad ogni punto dello spazio è associato il valore medio della grandezza considerata $\Rightarrow$ descrizione del fenomeno con variabili continue.

- Fluido multicomponente

- Massa volumica: $\rho_i = \dfrac{d\,m_i}{dV} \qquad i = 1,2,.....,N$

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i = \frac{dM}{dV} = \rho$$

$\rho \Rightarrow$ densità di massa totale

Questo concetto può essere generalizzato alle altre grandezze che sono proporzionali al volume del fluido, quali quantità di moto, energia, ecc.

$$\pi_i = \frac{d\,\Pi_i}{dV} \qquad \Rightarrow \text{concentrazione di grandezza generica.}$$

La velocità media ω_i delle particelle dell'i-esimo componente può essere differente per i diversi componenti. La velocità di gruppo $\overline{\varpi}$ può allora essere definita come:

$$\overline{\varpi} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i}{\rho} \varpi_i$$

In genere si assume $\overline{\varpi}$ coincidente con la velocità media dell'acqua.

Equazione di bilancio di massa tridimensionale

- Volume di controllo V
- $\Pi \Rightarrow$ grandezza considerata

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\int_{s} \pi\, \varpi\, \vec{n}\, ds + \int_{V} \xi\, dV$$

- S $\Rightarrow$ superficie di contorno di V [L^3]
- $\vec{n}$ $\Rightarrow$ versore della normale uscente dalla superficie
- $\zeta \Rightarrow$ tasso di produzione per unità di volume [$M/(L^3T)$]

Ipotesi

- Valori medi delle grandezze su un intervallo temporale discreto Δt

Notazioni

- $p \Rightarrow \overline{\pi}$
- $\overline{v} \Rightarrow$ valor medio della velocità del fluido
- $\overline{u} \Rightarrow$ valor medio della velocità di migrazione della quantità considerata, $\Rightarrow \overline{\varpi} - \overline{v}$
- $I \Rightarrow \overline{\zeta}$

Equazione di bilancio di massa tridimensionale

$$\frac{\partial p}{\partial t} + div\left(\overline{v}p\right) + div\left(\overline{u}p\right) - d = I$$

Termini dell'equazione di bilancio

- $div\left(\overline{v}p\right)$ ⇒ trasporto convettivo dovuto al moto del fluido

- $div\left(\overline{u}p\right)$ ⇒ trasporto dovuto a migrazione (sedimentazione, risalita di bolle di gas, azione di animali). Non trascurabile solo per sostanze non solubili.

- d ⇒ dispersione turbolenta e diffusione molecolare

Equazione di bilancio di massa tridimensionale

- Si pone: $u = 0$
- $d = div\left[\overline{D}\, grad\ p\right]$ con $\overline{D} = \begin{vmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{vmatrix}$

$\overline{D}$ prende il nome di coefficiente di dispersione longitudinale, trasversale e verticale. In pratica si assume che la dispersione turbolenta e la diffusione molecolare siano proporzionali al gradiente della grandezza considerata e ad un coefficiente che viene solitamente ricavato per via empirica.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + div\left(\overline{v}p\right) + div\left(\overline{D}\, grad\ p\right) = I$$

Equazione di bilancio di massa monodimensionale

- Nella modellistica di qualità fluviale spesso interessa la conoscenza della concentrazione di inquinanti mediata sulla sezione trasversale del corso d'acqua.

- Le variazioni in direzione verticale e trasversale non sono spesso rilevanti

- Spesso questa approssimazione si rende necessaria in conseguenza dell'impossibilità di effettuare prelievi in forma distribuita sulla sezione trasversale.

- L'approssimazione è accettabile quando la componente longitudinale della velocità è predominante rispetto alle altre due componenti.

- L'equazione monodimensionale si ricava integrando l'equazione tridimensionale lungo le direzioni verticale e trasversale.

Equazione di bilancio di massa monodimensionale

$$\frac{\partial(Ap)}{\partial t}+\frac{\partial(Avp)}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}\left(AD\frac{\partial p}{\partial s}\right)=AS$$

- $p \Rightarrow$ concentrazione della grandezza generica
- $t \Rightarrow$ tempo
- $s \Rightarrow$ coordinata lungo la direzione della corrente (ascissa fluviale)
- $v \Rightarrow$ velocità media del fluido
- $A \Rightarrow$ area della sezione trasversale
- $D \Rightarrow$ coefficiente di dispersione longitudinale
- $S \Rightarrow$ termine medio di sorgente $\Rightarrow$ produzione della grandezza generica per unità di volume e per unità di tempo

Equazione di bilancio di massa monodimensionale

- Il primo termine a primo membro rappresenta la variazione rispetto al tempo vista da un osservatore posto sulla riva, mentre il secondo ed il terzo termine rappresentano, rispettivamente, la componente convettiva e quella dispersiva del processo di trasporto.

- Il coefficiente di dispersione longitudinale D è ora uno scalare; rappresenta ora anche gli effetti della miscelazione verticale e trasversale dovuti alla disuniformità della velocità nella sezione trasversale del corso d'acqua, oltre agli affetti in precedenza descritti (dispersione turbolenta e diffusione molecolare).

- Le condizioni al contorno esprimenti le variazioni di p dovute ad apporti esterni sono incluse nel termine di sorgente S.

Sottomodello idraulico

- E' generalmente costituito da due equazioni differenziali accoppiate, che esprimono il bilancio di massa ed il bilancio della quantità di moto della massa idrica lungo il tronco fluviale considerato.

Equazione di bilancio di massa (equazione di continuità)

Si ottiene ponendo $p = \rho$, assumendo $D = 0$ e dividendo per ρ medesimo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{AS}{\rho}$$

Se non ci sono afflussi o deflussi laterali, si ha:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Equazione di bilancio della quantità di moto (equazione dinamica)

- Equazione del moto (bilancio della quantità di moto): si pone $p = \rho v$ e si nega il termine dispersivo ($D = 0$)

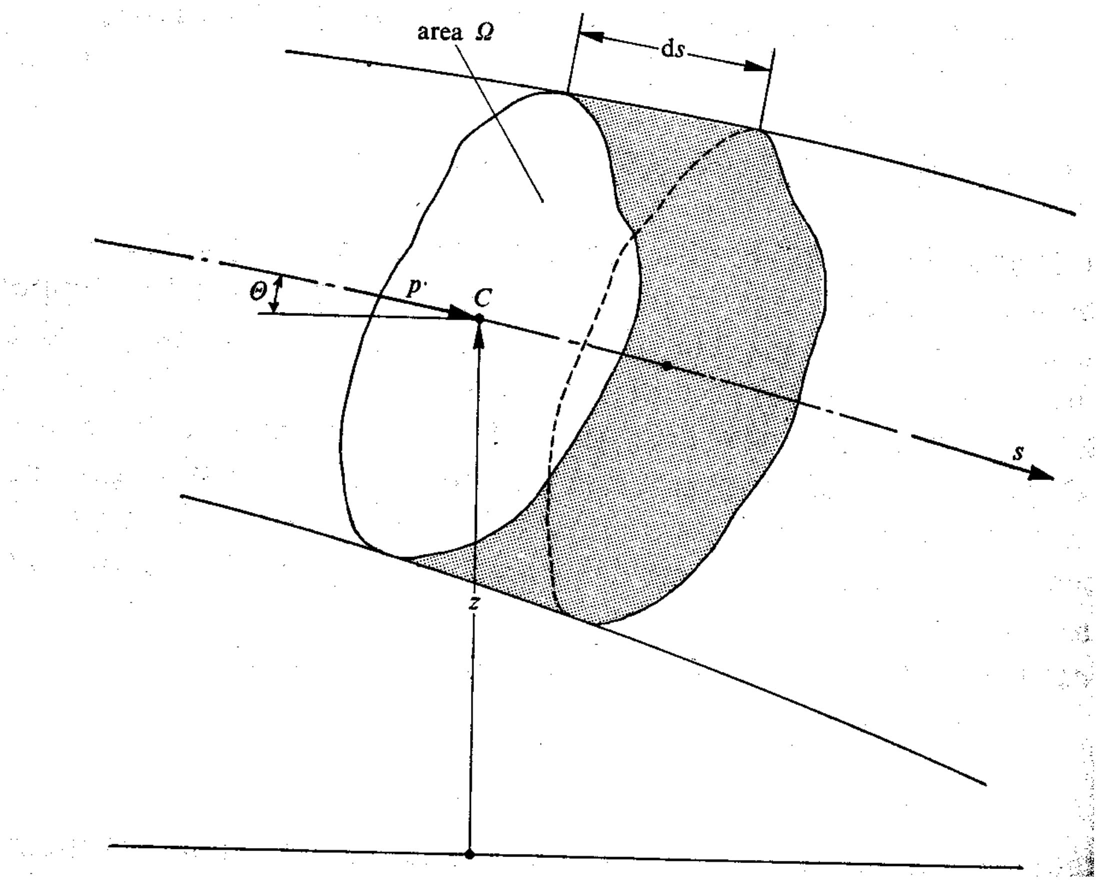
$$\frac{\partial(A\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho v^2)}{\partial s} = AS$$

- Termine di sorgente $\boldsymbol{S}$: tiene conto degli apporti e delle perdite distribuite di quantità di moto per effetto delle forze esterne. E' composto da tre termini:

  a) un termine dato dalla componente lungo l'ascissa fluviale delle forze gravitative

  b) un termine dato dalla componente lungo l'ascissa fluviale delle forze di pressione

  c) un termine di perdita indotto dalle resistenze al moto (azioni tangenziali sul contorno del volume di controllo)



a) $\rho g \, sen\Theta = -\rho g \frac{\partial z}{\partial s}$

- $z \Rightarrow$ quota assoluta del baricentro della sezione
- $g \Rightarrow$ accelerazione di gravità

b) $\frac{1}{A ds}\left\{ pA - \left[pA + \frac{\partial (pA)}{\partial s} ds \right] + p \frac{\partial A}{\partial s} ds \right\}$

c) $-\rho g J$

- $J \Rightarrow$ cadente piezometrica (perdita di energia per unità di peso della corrente e per unità di lunghezza del corso d'acqua.

Cioè:

$$AS = -\rho g A\left[\frac{\partial h_f}{\partial s} + \frac{\partial h_c}{\partial s} + J\right] + \frac{1}{ds}\left[pA - pA - p\frac{\partial A}{\partial s}ds - A\frac{\partial p}{\partial s}ds + p\frac{\partial A}{\partial s}ds\right]$$

- ove: $h_f \Rightarrow$ quota del punto più depresso della sezione
- $h_c \Rightarrow$ quota del baricentro della sezione

Eliminando e moltiplicando a secondo membro:

$$AS = -\rho g A\left[\frac{\partial h_f}{\partial s} + \frac{\partial h_c}{\partial s} + J\right] - A\frac{\partial p}{\partial s}$$

Sostituendo e dividendo per ρ (fluido incomprimibile):

$$\frac{\partial(Av)}{\partial t}+\frac{\partial(Av^2)}{\partial s}=-gA\left[\frac{\partial h_f}{\partial s}+\frac{\partial h_c}{\partial s}+J+\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial s}\right]$$

$$v\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial Av}{\partial s}+Av\frac{\partial v}{\partial s}=-gA\left[-i_f+\frac{\partial h_c}{\partial s}+J+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}\right]$$

Ricordando l'equazione di continuità:

$$A\frac{\partial v}{\partial t}+Av\frac{\partial v}{\partial s}=-gA\left[-i_f+\frac{\partial h_c}{\partial s}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}+J\right]$$

Dividendo per gA si ha:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s}=i_f-\frac{\partial h_c}{\partial s}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}-J$$

Ricordando che $\boldsymbol{h_c + p/\gamma = h}$, ove $\boldsymbol{h}$ è la quota del pelo libero rispetto al punto più depresso della sezione (corrente gradualmente variata e sezioni trasversali sensibilmente piane e verticali), si ricava:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s} = i_f - J$$

che è l'equazione dinamica di De Saint-Venant espressa nelle variabili $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{v}$ (una geometrica ed una cinematica).

Equazioni del moto vario delle correnti a pelo libero
(Equazioni di De Saint Venant)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial s} + \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{v}{g}\dfrac{\partial v}{\partial s} = i_f - J \\ \dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial Q}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

Sottomodello biochimico

Equazione di bilancio di massa

$$\frac{\partial(Ap)}{\partial t}+\frac{\partial(Avp)}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}\left(AD\frac{\partial p}{\partial s}\right)=AS$$

- Si trascura D $\Rightarrow$ alvei ove è prevalente il trasporto ad opera del movimento della corrente
- Si sviluppano le derivate:

$$A\frac{\partial p}{\partial t}+p\frac{\partial A}{\partial t}+p\frac{\partial(Av)}{\partial s}+Av\frac{\partial p}{\partial s}=AS$$

- Equazione di continuità:

$$A\frac{\partial p}{\partial t}+Av\frac{\partial p}{\partial s}=AS-(q_e-q_u)p$$

- Dividendo per A e ponendo $S_q = q_e$-q_u si ottiene:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial s}=S-\frac{S_q}{A}p$$

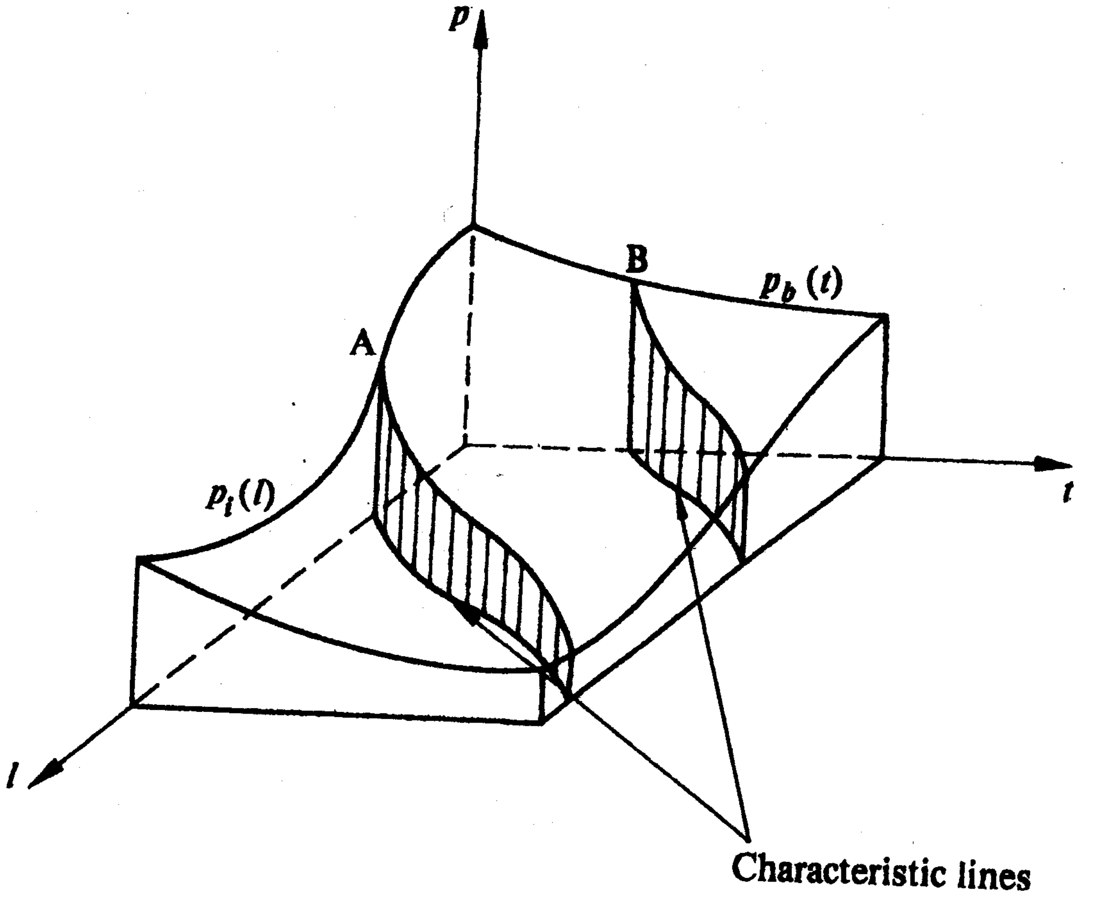
- Ricordare che tutte queste variabili sono funzione del tempo

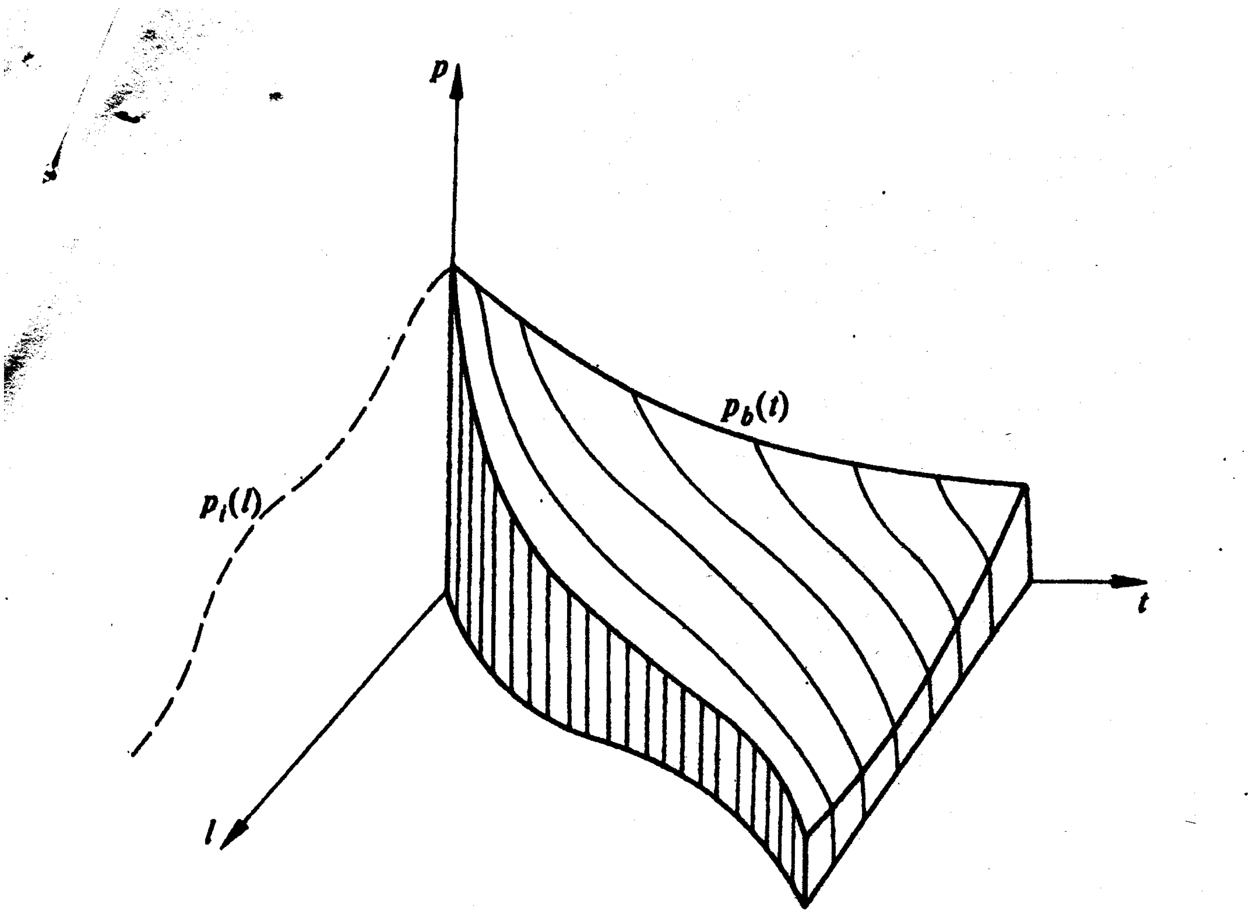
Metodo delle caratteristiche

$$\frac{ds}{dt} = v(s,t)$$

$$\frac{dp}{dt} = S - \frac{S_q}{A} p$$

Le condizioni iniziali non sono più strettamente necessarie





Le condizioni iniziali sono gradualmente “spazzate via” dalla corrente

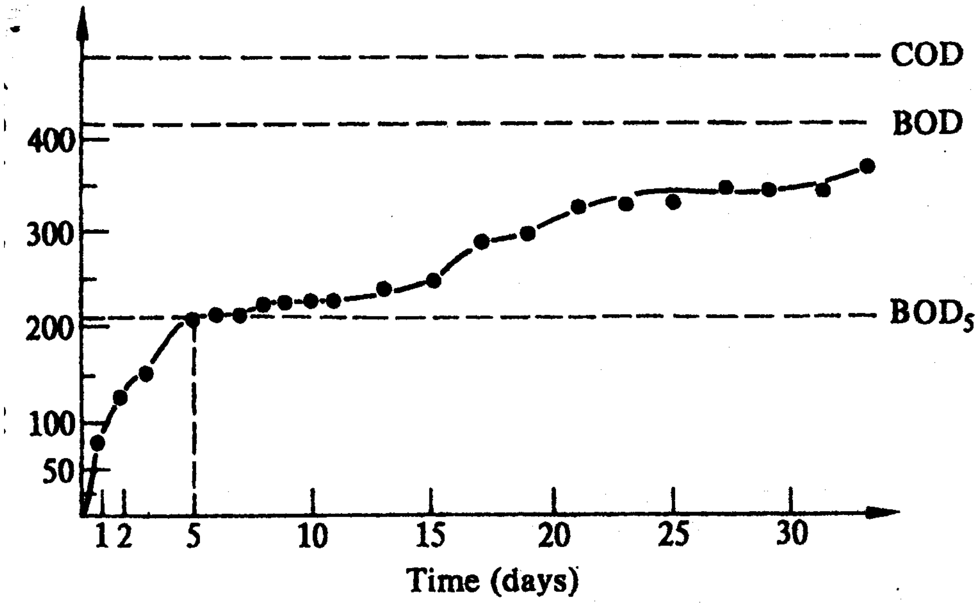
Le linee caratteristiche sono costituite da una sola famiglia di linee che si propagano verso valle.

La soluzione lungo una linea caratteristica è indipendente dalle soluzioni lungo le caratteristiche vicine. Ciò è dovuto all’aver trascurato la dispersione.

Caratteristiche dei modelli

- Modelli lineari e non lineari.
- Modelli dispersivi o di tipo “plug flow”.
- Modelli stazionari o non stazionari (le derivate parziali rispetto al tempo sono nulle o meno).
- Modelli ecologici: almeno una variabile è la biomassa di almeno un elemento vivente della catena trofica.

Modello di Streeter-Phelps



- Definizione di BOD_5: il BOD che si degrada nei primi 5 giorni. (Difficoltà di misurare il BOD totale che si degrada in tempi molto lunghi)

Il modello di Streeter-Phelps assume che:

a) Il tasso di decadimento del BOD sia proporzionale alla concentrazione del BOD medesimo;
b) Il tasso di deossigenazione coincide col tasso di decadimento del BOD;
c) Il tasso di reossigenazione è proporzionale al deficit di ossigeno disciolto;
d) La portata fluviale è costante.

Modello di Streeter-Phelps

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v\frac{\partial b}{\partial s} = -k_1 b$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + v\frac{\partial D}{\partial s} = -k_1 b + k_2 (D_s - D)$$

- Condizioni iniziali e al contorno

Linee caratteristiche

$$\frac{db}{dt} = -k_1 b$$

$$\frac{dD}{dt} = -k_1 b + k_2 (D_s - D)$$

Modello di Streeter-Phelps
Soluzioni

Equazione del BOD:

$$\frac{db}{dt} = -k_1 b$$

Separando le variabili:

$$\int \frac{db}{b} = -k_1 \int dt$$

$$\ln b = -k_1 t + cost$$

$$b = e^{-k_1 t + cost}$$ $b = b_0$ per $t = 0$

$$b_0 = e^{cost} \qquad cost = \ln b_0$$

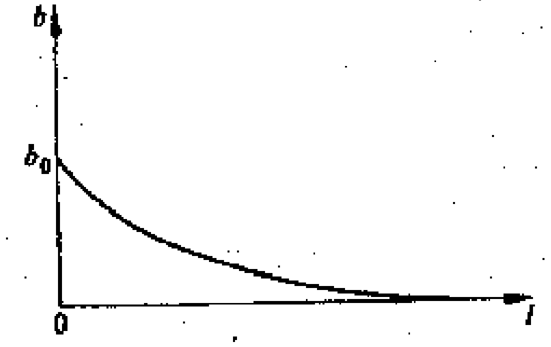
$$b(t) = b_0 e^{-k_1 t}$$

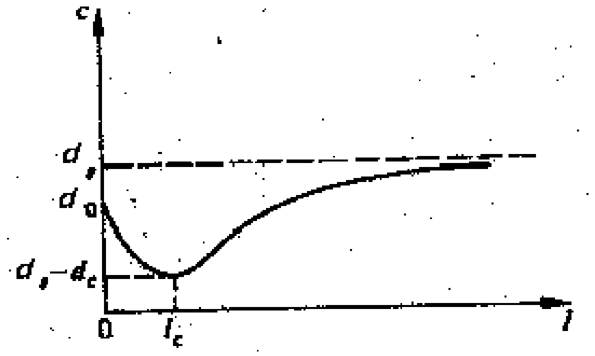
Modello di Streeter-Phelps
Soluzioni

Equazione del DO:

$$D(t) = D_s - (D_s - D_0)e^{-k_2 t} + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

Analisi della situazione stazionaria (sottomodello idraulico stazionario)





- La concentrazione di BOD decresce esponenzialmente a partire dalla concentrazione iniziale.

- La concentrazione di DO segue un andamento detto “curva a sacco”

Calcolo di l_c

Si eguaglia a zero la derivata prima della formula del DO:

$$\frac{dD}{dt} = -D_i e^{-k_2 t}(-k_2) + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\left(e^{-k_1 t}(-k_1) - e^{-k_2 t}(-k_2)\right) = 0$$

$$0 = k_2 D_i e^{-k_2 t} - \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} k_1 e^{-k_1 t} + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} k_2 e^{-k_2 t}$$

$$0 = k_2 D_i - \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} k_1 e^{-k_1 t + k_2 t} + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} k_2$$

$$k_2 D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} k_2 = \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} k_1 e^{-\frac{l_c}{v}(k_1 - k_2)}$$

$$\frac{k_2 D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} k_2}{k_1 \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}} = e^{-\frac{l_c}{v}(k_1 - k_2)}$$

$$\frac{k_2 D_i (k_1 - k_2) + k_1 b_0 k_2}{k_1 k_1 b_0} = e^{-\frac{l_c}{v}(k_1 - k_2)}$$

$$\frac{k_2}{k_1}\frac{1}{k_1}\frac{D_i}{b_0}(k_1-k_2)+\frac{k_2}{k_1}=e^{-\frac{l_c}{v}(k_1-k_2)}$$

$$f\frac{1}{k_1}\frac{D_i}{b_0}(k_1-k_2)+f=e^{-\frac{l_c}{v}(k_1-k_2)}$$

$$f\frac{1}{k_1}\frac{D_i}{b_0}k_1-f\frac{D_i}{b_0}f+f=e^{-\frac{l_c}{v}(k_1-k_2)}$$

$$f\left[\frac{D_i}{b_0}-f\frac{D_i}{b_0}+1\right]=e^{-\frac{l_c}{v}(k_1-k_2)}$$

$$f\left[\frac{D_i}{b_0}\left(1-f\right)+1\right]=e^{-\frac{l_c}{v}(k_1-k_2)}$$

$$\ln\left\{f\left[\frac{D_i}{b_0}\left(1-f\right)+1\right]\right\}=\ln\left[e^{-\frac{l_c}{v}(k_1-k_2)}\right]$$

$$\ln\left\{f\left[\frac{D_i}{b_0}\left(1-f\right)+1\right]\right\}\frac{v}{(k_2-k_1)}=l_c$$

$$l_c=\frac{v}{k_1(f-1)}\ln\left\{f\left[\frac{D_i}{b_0}\left(1-f\right)+1\right]\right\}$$

Calcolo di d_c

Si sostituisce l_c nella formula del DO:

$$D_s - D(t) = D_i e^{-k_2 t} - \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

$$D_l = D_i e^{-k_2 t} - \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} e^{-k_1 t} + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t}$$

$$D_l = e^{-k_2 t}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - e^{-k_1 t}\frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}$$

$$D_l = e^{-k_2 t}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - e^{-k_1 t}\frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}$$

Si pone: $f\left[\frac{D_i}{b_0}(1-f)+1\right] = g$

$$D_l = e^{-k_2 \frac{1}{k_1(f-1)}\ln g}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - e^{-\frac{1}{(f-1)}\ln g}\frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}$$

$$D_l = e^{-\frac{f}{(f-1)}\ln g}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - e^{-\frac{1}{(f-1)}\ln g}\frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}$$

$$D_l = e^{\ln g^{\frac{f}{(1-f)}}}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - e^{\ln g^{\frac{1}{(1-f)}}}\frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}$$

$$D_l = g^{\frac{f}{(1-f)}}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - g^{\frac{1}{(1-f)}}\frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}$$

$$D_l = \frac{g^{\frac{1}{(1-f)}}}{g}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - g^{\frac{1}{(1-f)}}\frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}$$

$$D_l = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{1}{g}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right]$$

$$D_l = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{1}{f\left[\frac{D_i}{b_0}(1-f)+1\right]}\left(D_i + \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right) - \frac{k_1 b_0}{k_1 - k_2}\right]$$

$$D_l = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{\left(D_i + \frac{b_0}{(1-f)}\right)}{f\left[\frac{D_i}{b_0}\left(1-f\right)+1\right]} - \frac{b_0}{1-f}\right]$$

$$D_l = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{\left(\frac{D_i - fD_i + b_0}{(1-f}\right)}{f\left[\frac{D_i - fD_i + b_0}{b_0}\right]} - \frac{b_0}{1-f}\right]$$

$$D_l = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{\frac{1}{(1-f)}}{f\,\frac{1}{b_0}} - \frac{b_0}{1-f}\right]$$

$$D_l = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{b_0}{f(1-f)} - \frac{b_0}{1-f}\right]$$

$$D_l = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{b_0 - fb_0}{f(1-f)}\right] = g^{\frac{1}{(1-f)}}\left[\frac{b_0(1-f)}{f(1-f)}\right]$$

$$D_l = \frac{b_0}{f}\left\{f\left[\frac{D_i}{b_0}\left(1-f\right)+1\right]\right\}^{\frac{1}{(1-f)}}$$