

LO STUDIO DEI FENOMENI FLUVIALI ATTRAVERSO MODELLI FISICI

Armando Brath, Alberto Lamberti e Alberto Montanari

Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Bologna

1. Introduzione

Il celebre enunciato di Leonardo da Vinci (1452 - 1519), mediante il quale egli invitava a "ricordare, discutendo di acqua, di addurre prima l'esperienza e poi la ragione", evidenzia come già in tempi molto remoti alla pratica sperimentale fosse attribuito un ruolo di rilievo nella studio della meccanica dei fluidi. In particolare, i modelli di correnti a pelo libero hanno ormai una lunga storia legata alle loro applicazioni, finalizzate per lo più a riprodurre in scala ridotta tratti di alvei fluviali, per studiarne l'evoluzione morfologica, il comportamento idraulico in risposta ad assegnate sollecitazioni di progetto o gli effetti indotti da manufatti inseriti in alveo. Il ruolo di tali modelli è ancora oggi di notevole attualità in seguito alla accresciuta necessità di analizzare la sicurezza degli alvei e di progettare la sistemazione al fine di proteggere le aree contermini alle aste fluviali nei confronti degli eventi di piena e di tutelare la funzionalità delle infrastrutture interferenti con gli alvei fluviali.

L'avvento, relativamente recente, dei moderni sistemi di calcolo automatico ha reso possibile affrontare tali problemi anche con l'ausilio di modelli numerici. Ciò ha almeno in parte limitato la necessità di fare ricorso a modelli fisici, prima resi necessari dalla impossibilità di risolvere numericamente le equazioni differenziali del moto dei fluidi reali. I modelli numerici sono stati così recentemente utilizzati per affrontare numerosi problemi legati alla meccanica dei fluidi, riguardanti ad esempio il movimento delle acque nel sottosuolo e il moto permanente e vario delle correnti a pelo libero anche in alveo mobile.

In realtà, la modellistica numerica e quella fisica presentano molte caratteristiche in comune. Entrambe devono essere progettate in base ad un preciso approccio concettuale, che prende le mosse dall'identificazione delle leggi fisiche che sono coinvolte nel processo in studio o quantomeno, nel caso dei modelli fisici, dei fattori che controllano lo stesso. Inoltre, entrambi gli approcci devono giocoforza ricorrere a semplificazioni ed approssimazioni del fenomeno reale. La differenza fondamentale, invece, fra i due tipi di approccio risiede nella necessità, imposta dal modello numerico, della formulazione di equazioni idonee alla descrizione del moto del fluido; nel modello fisico detta necessità non è presente, essendo sufficiente l'identificazione delle forze in gioco e la formulazione di criteri di similitudine che ne consentano la riproduzione in scala ridotta.

Tale distinzione permette di evidenziare i campi in cui risulta preferibile l'applicazione dell'uno o dell'altro approccio. In generale, infatti, l'uso dei modelli fisici è necessario quando risulti impossibile formulare o risolvere un sistema di equazioni atto a descrivere i processi che hanno luogo nel sistema reale, che indicheremo nel seguito con il termine

di prototipo. Ciò spesso accade quando si devono analizzare fenomeni per i quali le leggi che ne regolano la dinamica evolutiva non siano soddisfacentemente note, oppure quando la definizione dei contorni del campo di moto in termini numerici risulti problematica. D'altro canto, i modelli numerici risultano preferibili per la rappresentazione di fenomeni su larga scala spaziale, per i quali un modello fisico in scala non eccessivamente ridotta richiederebbe spazi spesso superiori a quelli disponibili nei laboratori; ciò in considerazione del fatto che adottare riduzioni di scala elevate rende particolarmente arduo il rispetto di corretti criteri di similitudine. Volendo quindi generalizzare, si potrebbe concludere che i modelli numerici sono generalmente più idonei alla simulazione di fenomeni che si esplicano su scale spaziali estese, mentre i modelli fisici trovano il loro ideale campo di applicazione nell'analisi dei fenomeni localizzati.

Nella realtà infatti i modelli idraulici in scala ridotta delle correnti a pelo libero sono spesso impiegati per analizzare fenomeni localizzati, quali erosioni alla base di manufatti e difese spondali oppure interferenze fra la corrente fluviale e infrastrutture dalla geometria particolarmente complessa, che rendono problematica la definizione delle condizioni al contorno in un ipotetico modello numerico.

I modelli fisici sono quindi tuttora uno strumento spesso indispensabile nello studio dei fenomeni idraulici che avvengono negli alvei fluviali, sebbene la loro realizzazione sia vincolata alla disponibilità di idonee strumentazioni e attrezzature di laboratorio. L'individuazione delle condizioni da assicurare per il rispetto dei criteri di similitudine comporta spesso problemi di non facile soluzione. La letteratura scientifica al riguardo è particolarmente ricca di contributi, che sintetizzano un'esperienza nel settore ormai più che secolare.

Ai modelli fisici si richiede normalmente da un lato di rappresentare i fenomeni rilevanti con sufficiente affidabilità e dall'altro di convincere il progettista ed il committente della attendibilità dei risultati da essi forniti.

In relazione al primo scopo è indispensabile porre l'accento sul termine "fenomeni rilevanti". Infatti, la rappresentazione affidabile dei fenomeni non è in genere completa, ma si limita ad alcuni aspetti ritenuti principali, mentre per i restanti ci si accontenta di verificare che nel modello, come nel prototipo, questi restino di secondaria importanza o possano essere filtrati, cioè identificati e rimossi, quando questi acquisissero una qualche importanza.

In relazione invece al secondo scopo è necessario che la corrispondenza fra i fenomeni reali e quelli riprodotti nel modello sia semplice e per quanto possibile completa, percepibile facilmente in relazione alla loro somiglianza ed alla cura nella rappresentazione. Un'eccessiva semplificazione come un eccessivo filtraggio dei risultati ottenuti può essere causa di una perdita di capacità di convincimento.

La presente nota è dedicata ad una sintesi dei principali aspetti della teoria dei modelli idraulici in scala ridotta a fondo fisso e mobile. La prossime due sezioni sono in particolare dedicate al richiamo dei principi fondamentali dell'analisi dimensionale, che consentono di formulare i criteri di similitudine sui quali fondare la progettazione del modello. La quarta parte della memoria è dedicata all'applicazione di tali principi al caso

di modelli di correnti a pelo libero a fondo fisso, mentre la quinta parte prende in considerazione le problematiche relative alla rappresentazione di alvei a fondo mobile. L'ultima parte è infine dedicata ad una breve descrizione, a titolo esemplificativo, di due modelli idraulici realizzati nel Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna.

2. Elementi di analisi dimensionale

2.1. La misura delle grandezze fisiche

La misura di una grandezza fisica è definita come il rapporto fra la grandezza stessa ed un'altra della stessa specie, assunta quale unità di misura. Al variare di tale unità di misura cambiano, naturalmente, tutte le misure delle grandezze della specie fisica considerata; il rapporto fra le misure di due grandezze della stessa specie resta invece inalterato, ed esso assume quindi valore oggettivo.

L'evidenza sperimentale ha mostrato che esistono legami ben precisi fra le misure di grandezze di specie diversa, estrinsecati da leggi fisiche. Ciò consente pertanto di suddividere le grandezze fisiche in grandezze fondamentali, per le quali è necessario definire l'unità di misura, e grandezze derivate, la cui unità di misura è invece desumibile dalle unità delle grandezze fondamentali per mezzo delle leggi fisiche predette.

Il numero e la natura delle grandezze per le quali occorre definire l'unità di misura, e da considerare perciò come fondamentali, sono del tutto arbitrari (vedi *Adami*, 1994, pag. 6). E' solo per abitudine consolidata che nella meccanica classica si sono assunte tre grandezze fondamentali, cioè lunghezza, la cui unità di misura verrà di seguito indicata con il simbolo L , tempo (T) e massa (M). La medesima assunzione sarà effettuata nell'ambito della presente trattazione.

Anche nella definizione di misura delle grandezze derivate sussiste un'ampia arbitrarietà. Così una volta convenuto di considerare la forza come grandezza derivata, se ne può definire la misura non solo in base alla legge fondamentale della dinamica, ma anche in base ad ogni altra legge fisica che coinvolga la forza stessa, ad esempio la legge di gravitazione universale.

Le unità di misura delle grandezze fondamentali sono fissate in base a convenzioni, variando le quali si possono adottare nuove unità per le masse, le lunghezze e i tempi che abbiano, ordinatamente, misura r_M, r_L, r_T nei confronti delle rispettive unità originarie.

A seguito di ciò, risulteranno diverse, in generale, anche le unità di misura delle grandezze derivate, pur mantenendo inalterate le definizioni di misura per tali grandezze e le convenzioni sulla scelta delle unità relative. La nuova unità per la grandezza derivata A avrà misura r_A rispetto all'unità primitiva di A , e questo valore dipenderà dai cambiamenti imposti alle unità fondamentali, cioè

$$r_A = f(r_M, r_L, r_T) \quad (1)$$

La natura della relazione funzionale f è vincolata dalla necessità di definire le misure in modo da conservare il valore dei rapporti fra grandezze della stesse specie che, come si è

visto, hanno valore oggettivo. Si può dimostrare che questa condizione è soddisfatta se e solo se f assume la forma di un prodotto di potenze (Yalin, 1971, pag. 2), sicché la (1) diviene

$$r_A = r_M^{\alpha_A} r_L^{\beta_A} r_T^{\gamma_A} \quad (2)$$

Se α_A , β_A e γ_A risultano identicamente nulli, l'unità di misura della grandezza A resta invariata nonostante i mutamenti apportati alle unità di misura fondamentali, e si dice che A costituisce una grandezza adimensionale, ossia un numero puro. Se, invece, solamente α_A e γ_A risultano nulli, A è una grandezza di tipo geometrico, mentre l'uguaglianza a zero di solo α_A identifica le grandezze cinematiche. Le grandezze di tipo dinamico sono invece caratterizzate da valori diversi da zero di tutti e tre gli esponenti.

Il cambiamento di unità di misura delle tre grandezze fondamentali porta quindi a mutamenti ben determinati delle unità di tutte le grandezze derivate. Inversamente, una nuova scelta arbitraria delle unità di misura per tre grandezze derivate tra loro dimensionalmente indipendenti implica una variazione ben determinata sulle unità di misura delle grandezze fondamentali. Infatti, se a tre grandezze derivate A_i competono le espressioni dimensionali

$$A_i = M^{\alpha_{A_i}} L^{\beta_{A_i}} T^{\gamma_{A_i}} \quad (3)$$

e se si adottano per tali grandezze delle nuove unità con misura r_{A_i} nei confronti delle corrispondenti unità originarie, le corrispondenti misure r_M , r_L e r_T delle grandezze fondamentali, che conseguentemente dovranno essere assunte come nuove unità di misura, si ricavano imponendo che sia rispettata la relazione

$$r_{A_i} = r_M^{\alpha_{A_i}} r_L^{\beta_{A_i}} r_T^{\gamma_{A_i}}, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (4)$$

Scelte quindi arbitrariamente gli r_{A_i} , il sistema di equazioni (4), lineare e non omogeneo nei logaritmi delle variabili incognite r_M , r_L , e r_T , ammette un'unica soluzione a condizione che sia diverso da zero il determinante estratto dalla matrice dei suoi coefficienti, cioè

$$\begin{vmatrix} \alpha_{A_1} & \beta_{A_1} & \gamma_{A_1} \\ \alpha_{A_2} & \beta_{A_2} & \gamma_{A_2} \\ \alpha_{A_3} & \beta_{A_3} & \gamma_{A_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5)$$

In tal caso, si dice che il gruppo di grandezze A_i è dimensionalmente indipendente e può quindi costituire un nuovo insieme di grandezze fondamentali. In questo senso, l'insieme delle tre grandezze derivate A_i risulta equivalente al gruppo delle grandezze fondamentali di partenza.

Nel caso della meccanica dei fluidi, ad esempio, sono spesso assunte come grandezze fondamentali la densità di massa del fluido ρ , la velocità u , e la lunghezza L , che sono tre grandezze tra loro dimensionalmente indipendenti. Infatti, il determinante estratto dalla matrice delle dimensioni delle loro unità di misura rispetto alle grandezze M , L e T si scrive

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad (6)$$

Se, ad esempio, si fossero invece scelte la velocità u , la lunghezza L e l'accelerazione di gravità g non si sarebbe compiuta una scelta corretta; infatti il valore del determinante della matrice relativa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad (7)$$

il che evidenzia come le tre grandezze scelte non siano dimensionalmente indipendenti.

2.2. Le leggi della fisica

Le leggi che governano i fenomeni fisici sono espresse nella forma di relazioni matematiche, dimensionalmente omogenee, fra le grandezze fisiche in gioco. La definizione quantitativa di un fenomeno fisico necessita innanzi tutto dell'individuazione di p grandezze fisiche indipendenti a_1, \dots, a_p che siano necessarie e sufficienti per descriverlo compiutamente. Tali grandezze, la cui indipendenza implica che nessuna di esse possa essere espressa in funzione delle altre, sono dette *parametri caratteristici* del fenomeno considerato e possono essere dimensionali o adimensionali, costanti o variabili. La loro scelta non è univoca, poiché vi possono essere più combinazioni indipendenti delle grandezze che intervengono nel fenomeno atte a descriverlo compiutamente. E' invece invariante il loro numero p , che si configura quindi come una caratteristica propria del fenomeno stesso.

Al fenomeno fisico può essere associato un numero variabile di proprietà quantitative A_i , la cui conoscenza ci permette di descriverlo compiutamente. Esse si possono esprimere in funzione dei parametri caratteristici, secondo una legge del tipo

$$A_i = f_{A_i}(a_1, a_2, \dots, a_p) \quad , \quad (8)$$

che evidenzia come la A_i sia di fatto un'altra grandezza fisica caratteristica del fenomeno. Nell'insieme di grandezze a_1, \dots, a_p è possibile scegliere un gruppo di grandezze atte a svolgere le funzioni di grandezze fondamentali rispetto all'insieme stesso. E' il caso di ricordare che, di solito, questo gruppo sarà formato da tre grandezze, e tale lo si supporrà in seguito. Inoltre si può supporre, senza nuocere alla generalità della trattazione, che le tre grandezze fondamentali predette siano a_1, a_2 e a_3 .

Indicate quindi con x_i, y_i e z_i le dimensioni rispetto alle a_1, a_2 , e a_3 di ciascuna delle $p - 3$ grandezze a_i rimanenti, si possono così definire $p - 3$ nuove grandezze fisiche indipendenti, tutte di dimensioni nulle, che assumono quindi la forma

$$\Pi_i = \frac{a_i}{a_1^{x_i} a_2^{y_i} a_3^{z_i}} \quad i = 4, 5, \dots, p. \quad (9)$$

Allo stesso modo, è possibile esprimere l'equivalente adimensionale della proprietà A nella forma

$$\Pi_A = \frac{A}{a_1^{x_A} a_2^{y_A} a_3^{z_A}} \quad (10)$$

Fra i valori delle grandezze adimensionali ricavate ed i valori di a_1 , a_2 e a_3 sussiste quindi un legame funzionale che si può esprimere come

$$\Pi_A = \varphi_A(a_1, a_2, a_3, \Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_p) = 0, \quad (11)$$

solo formalmente diverso da quello espresso dalla (8).

Variando separatamente le unità di misura delle a_1 , a_2 e a_3 variano conseguentemente i corrispondenti valori di tali tre grandezze, mentre restano inalterati i numeri puri Π che figurano nella (11), in quanto misure di grandezze adimensionali. Poiché la validità di una legge fisica deve prescindere dall'unità di misura adottata per le grandezze in gioco, è immediato comprendere come di fatto la dipendenza analitica risultante (11) debba essere limitata ai soli valori dei rapporti adimensionali indicati, e possa quindi più propriamente essere scritta nella forma

$$\Pi_A = \varphi_A(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_p) = 0, \quad (12)$$

dove il pedice A della φ_A indica che la forma della funzione φ_A medesima dipende dalla proprietà A presa in considerazione.

Ne consegue che una legge fisica esprime un legame fra p grandezze con dimensioni non nulle può sempre essere rappresentata da un legame analitico tra un numero ridotto, generalmente $P = p - 3$, di grandezze adimensionali indipendenti ottenute dalle grandezze di partenza. Questa conclusione costituisce l'enunciato del teorema di Buckingham o teorema π .

Fra le p grandezze fisiche considerate possono essere presenti più gruppi di grandezze idonee a svolgere le funzioni di insieme fondamentale rispetto alle rimanenti, gruppi che danno origine ad altrettante diverse espressioni analitiche tra numeri puri differenti. Tali diverse espressioni risultano in ultima analisi equivalenti, poiché riconducibili le une alle altre attraverso semplici trasformazioni matematiche.

Dalla trattazione svolta appare evidente l'importanza della corretta scelta dei parametri caratteristici a_1, \dots, a_p che appaiono nella (8). Essi devono includere un numero p di grandezze indipendenti dalle quali il fenomeno dipende, non escludendo quelle che assumono valore costante, quale ad esempio la forza di gravità che interviene nei processi di moto delle correnti a pelo libero. L'omissione infatti anche di una sola di tali grandezze, sia pure costante, induce un'errata determinazione del numero delle grandezze adimensionali dalle quali il fenomeno dipende, che sono in definitiva le reali variabili che intervengono nella dinamica del processo. La corretta individuazione del

numero e della natura dei parametri caratteristici di un fenomeno è una delle maggiori difficoltà dell'analisi dimensionale.

La (8), e il suo equivalente adimensionale (12), rappresentano le usuali relazioni mediante le quali sono rappresentate la maggioranza delle leggi fisiche. La (12) ha, rispetto alla propria formulazione dimensionale espressa dalla (8), due principali vantaggi. In primo luogo essa è funzione di un numero ridotto di variabili e in secondo luogo risulta indipendente dal sistema di unità di misura.

2.3. *L'analisi dimensionale nella meccanica di fluidi*

Le grandezze necessarie alla descrizione dei fenomeni relativi alla meccanica dei fluidi, in assenza di effetti di tipo termodinamico, elettromagnetico e chimico, sono nove. Una possibile scelta di tali grandezze è riportata nella Tabella 1, assieme ai simboli che verranno in seguito utilizzati e alle relative unità di misura espresse secondo il Sistema Internazionale.

Tabella 1. Parametri caratteristici comunemente utilizzati nella descrizione dei fenomeni relativi alla meccanica dei fluidi

Grandezza	Simbolo	Unità di misura
Lunghezza	L	m
Tempo	T	s
Velocità	u	ms^{-1}
Accelerazione di gravità	g	ms^{-2}
Pressioni	p	$Kgm^{-1}s^{-2}$
Densità del fluido	ρ	Kgm^{-3}
Viscosità dinamica	μ	$Kgm^{-1}s^{-1}$
Comprimibilità	ε	$Kgm^{-1}s^{-2}$
Tensione superficiale	σ	Kgs^{-2}

In base al teorema π richiamato nel precedente paragrafo, si deduce che ogni legge fisica relativa alla meccanica dei fluidi deve essere esprimibile mediante relazioni che coinvolgono al più sei numeri puri.

Fra i tanti numeri puri che è possibile definire nell'ambito della meccanica dei fluidi, hanno incontrato impiego particolarmente frequente quelli che vengono derivati combinando la terna di grandezze indipendenti costituita da densità, lunghezza e velocità con ognuna delle altre grandezze rimanenti. Si ottengono così sei numeri puri indicati in Tabella 2; in essa si riconoscono i classici numeri adimensionali trattati nei corsi di meccanica dei fluidi, concepiti prima ancora dello sviluppo dell'analisi dimensionale. Il simbolo ν indica la viscosità cinematica del fluido ($\nu = \mu/\rho$).

Scegliendo una diversa terna di grandezze indipendenti si possono ricavare altri numeri puri, che possono riuscire più comodi in talune applicazioni.

Tabella 2. Numeri puri abitualmente utilizzati in meccanica dei fluidi

Numero	Simbolo	Espressione

Reynolds	Re	$Re = uL/\nu$
Froude	Fr	$Fr = u/\sqrt{gL}$
Weber	We	$We = u\sqrt{\rho L/\sigma}$
Mach	Ma	$Ma = u\sqrt{\rho/\varepsilon}$
Eulero	Eu	$Eu = p/\rho u^2$
Strouhal	St	$St = L/tu$

In pratica si può osservare, ad esempio, che il numero di Reynolds scaturisce dall'adimensionalizzazione della viscosità dinamica μ , quello di Froude della accelerazione di gravità g e così via.

Tutti i numeri puri riportati in Tabella 2, ad eccezione di quello di Strouhal, possono essere interpretati, dal punto di vista dinamico, come rapporto fra la forza d'inerzia, espressa dal termine $\rho L^2 u^2$, e le forze di diversa natura di volta in volta agenti su un assegnato volume di fluido. Ad esempio, il numero di Reynolds può essere espresso come rapporto fra la forza d'inerzia e la forza di attrito viscoso, espressa dal termine μLu , sicché risulta $Re = \rho L^2 u^2 / \mu Lu = \rho Lu / \mu = uL / \nu$. Il numero di Froude può invece essere ottenuto ponendo a denominatore la forza di gravità, espressa dal termine $\rho L^3 g$, sicché si ha $Fr^2 = \rho L^2 u^2 / \rho L^3 g = u^2 / gL$. I numeri di Eulero e di Weber si ricavano adimensionalizzando la forze esplicitate dalla pressione e dalla tensione superficiale, espresse rispettivamente dai termini pL^2 e σL , ottenendo quindi $Eu = \rho L^2 u^2 / pL^2 = \rho u^2 / p$ e $We = \rho L^2 u^2 / \sigma L = u^2 \rho L / \sigma$ e così via.

Alcuni di questi numeri hanno anche un'interpretazione cinematica: ad esempio, il numero di Froude può essere interpretato come il rapporto fra la velocità del fluido e la velocità di propagazione di un'onda gravitazionale di piccola ampiezza, mentre il numero di Mach può essere espresso come rapporto fra la velocità del fluido e quella di propagazione di una perturbazione elastica.

In generale può accadere che la medesima grandezza fisica che interviene in un fenomeno fisico abbisogni di essere rappresentata da $s > 1$ valori diversi. In tal caso, tutti questi valori dovranno comparire nella relazione (8), sicché nel suo equivalente adimensionale (11) dovranno comparire anche $s-1$ rapporti tra i medesimi diversi valori ed uno assunto come rappresentativo. Per esempio, se un moto di una corrente a pelo libero si svolge in un canale la cui sezione trasversale possa essere considerata indefinitamente larga, la sola grandezza geometrica che interviene nel processo di moto è l'altezza dell'acqua h . Se, invece il moto si svolge in un canale non indefinitamente largo, deve essere inclusa fra le grandezze rappresentative, accanto alla profondità dell'acqua, anche la larghezza b del canale medesimo. In tal caso, fra le quantità adimensionali dovrà essere incluso il rapporto b/h della sezione trasversale.

Al fine di agevolare la comprensione dei principi dell'analisi dimensionale fin qui richiamati, può essere utile illustrare un semplice caso di studio finalizzato a determinare l'espressione della portata idrica defluente sopra uno stramazzone triangolare in parete sottile, di forma simmetrica, schematicamente rappresentato nella Figura 1.

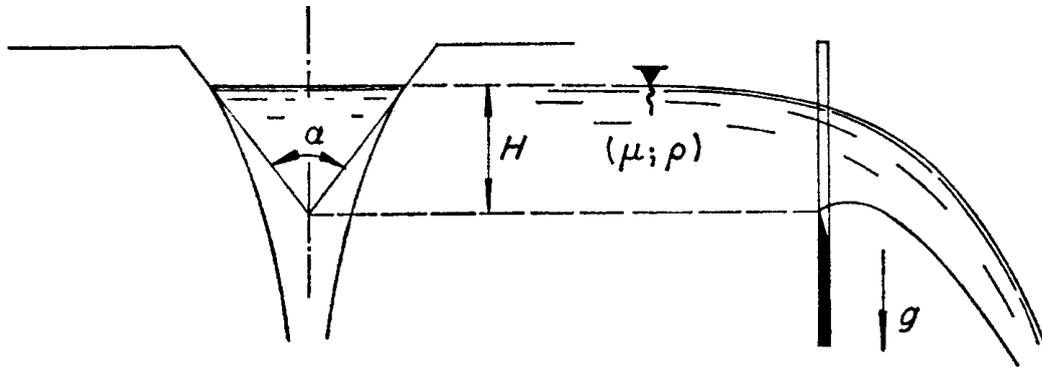


Figura 1. Stramazzo triangolare in parete sottile sul quale insiste un battente idrico H

Assumendo che lo spessore della lama d'acqua sia sufficientemente grande cosicch  possano essere ritenuti in via approssimata trascurabili gli effetti della tensione superficiale, le grandezze fisiche che possono essere assunte quali parametri caratteristici del fenomeno di deflusso dallo stramazzo sono il battente idrico H sulla soglia dello stramazzo medesimo, l'accelerazione di gravit  g , la viscosit  dinamica μ e la densit  ρ del fluido. Ogni grandezza del fenomeno in esame pu  quindi essere rappresentata come una funzione di tali parametri; ad esempio la portata Q pu  scriversi

$$Q = \varphi_Q(H, g, \rho, \mu) \quad (13)$$

Le tre grandezze H , g e ρ hanno dimensioni indipendenti e quindi possono essere scelte come grandezze fondamentali. In virt  del teorema π , la versione adimensionale della grandezza Q sar  funzione di una sola variabile e perci 

$$\Pi_Q = \varphi_Q(\Pi_4) \quad (14)$$

Procedendo analogamente alla procedura seguita per ricavare la (9), si pu  scrivere

$$\Pi_4 = \frac{\rho H^{\frac{3}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{\mu} \quad (15)$$

e, coerentemente alla (10),

$$\Pi_Q = \rho^o H^{-\frac{5}{2}} g^{-\frac{1}{2}} Q = \frac{Q}{H^{\frac{5}{2}} g^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

Dalla (16) si ottiene quindi

$$\frac{Q}{H^{\frac{5}{2}}g^{\frac{1}{2}}} = \varphi_Q \left(\frac{\rho H^{\frac{3}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{\mu} \right) \quad , \quad (17)$$

cioè

$$Q = m \sqrt{2g} H^{\frac{5}{2}} \quad , \quad (18)$$

dove si è indicato con m il coefficiente adimensionale

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_Q \left(\frac{\rho H^{\frac{3}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{\mu} \right) \quad . \quad (19)$$

Il coefficiente m è quindi una funzione del numero adimensionale Π_4 , il quale dà conto dell'influenza della viscosità sul deflusso della corrente; la funzione φ_Q dipende dall'angolo di apertura α (in generale, dalla geometria dello stramazzo) e deve essere determinata sperimentalmente, misurando contemporaneamente diversi valori di H , e quindi di Π_4 , e le corrispondenti portate Q .

La validità della curva sperimentale che esprime m al variare di Π_4 è del tutto generale; essa rimane quindi identica per stramazzi aventi forma simile a quella considerata e per diversi fluidi caratterizzati da differenti valori di ρ e μ .

3. Le leggi di similitudine

La validità per il prototipo delle osservazioni compiute sul modello è assicurata dal rispetto delle *leggi di similitudine*, le quali possono essere rispettate anche quando i fluidi utilizzati sul modello e sul prototipo siano diversi. Tale circostanza può risultare in alcuni casi vantaggiosa; ad esempio quando si tratta di studiare il moto di fluidi particolari, come sostanze oleose o pericolose, che possono essere sostituiti nel modello da fluidi di più agevole impiego o semplicemente più economici, quali ad esempio l'acqua o l'aria.

3.1. Il concetto di modello

Modificando le convenzioni in base alle quali sono state fissate le unità di misura delle grandezze fondamentali, che supponiamo essere lunghezza L , massa M e tempo T , si possono adottare altre unità aventi ordinatamente misura λ_L , λ_M e λ_T nei confronti delle rispettive unità originarie, cioè

$$\begin{aligned} L_m &= \lambda_L L_n \\ T_m &= \lambda_T T_n \\ M_m &= \lambda_M M_n \end{aligned} \quad , \quad (20)$$

dove il pedice n si riferisce alla misura effettuata con l'unità di misura di partenza e il pedice m alla nuova unità.

Dalla conoscenza delle scale di conversione delle grandezze fondamentali, espresse dalle (20), è possibile ricavare le analoghe scale di ogni grandezza derivata. Considerando ad esempio la generica grandezza A , si potrà scrivere

$$\lambda_A = \lambda_M^{\alpha_A} \lambda_L^{\beta_A} \lambda_T^{\gamma_A} \quad , \quad (21)$$

dove α_A , β_A e γ_A sono gli esponenti introdotti nella (2), che possono essere ricavati eguagliando l'unità di misura di A , quindi del primo membro della (21), con l'unità di misura del secondo membro.

Poiché i numeri puri godono della proprietà di essere invarianti al variare delle unità di misura, la legge fisica in forma adimensionale riferita ad un assegnato fenomeno ed espressa dalla

$$\Pi_A = \varphi_A(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_p) \quad , \quad (22)$$

rimarrà valida anche in seguito alla modifica delle unità di misura delle grandezze fisiche coinvolte. Ciò peraltro rispecchia l'evidenza intuitiva che le leggi fisiche devono necessariamente essere invarianti rispetto al sistema di unità di misura scelto per le grandezze da esse coinvolte.

Allo stesso modo, la realizzazione di un modello in scala ridotta altera non già le unità di misura delle grandezze fondamentali coinvolte ma bensì le misure effettive delle grandezze medesime, in modo che esse assumano misura rispettivamente λ_L , λ_M e λ_T rispetto alle grandezze originarie del prototipo. La scelta di λ_L , λ_M e λ_T non potrà però essere arbitraria, in quanto i numeri puri Π_i dovranno rimanere immutati, assicurando così la validità per il modello di tutte le leggi fisiche riferite al prototipo. Tale considerazione suggerisce inevitabilmente l'idea che un fenomeno meccanico può essere studiato in un "piccolo mondo" artificiale che è il modello a scala ridotta, nel quale le lunghezze, le masse e i tempi sono ridotti secondo le scale di riduzione rispettivamente λ_L , λ_M e λ_T opportunamente scelte.

Indicando con i pedici m e n le grandezze riferite rispettivamente al modello e al prototipo, è perciò possibile ricavare il valore della generica grandezza A_n riferita al prototipo attraverso la corrispondente grandezza misurata sul modello,

$$A_n = \frac{A_m}{\lambda_A} \quad , \quad (23)$$

dove λ_A può essere ricavato dalla (21) e rappresenta ora il rapporto fra la generica grandezza misurata nel modello e la corrispondente misurata sul prototipo.

I rapporti di similitudine espressi dalle (20) hanno un ben preciso significato fisico. Il primo di essi indica che il modello e il prototipo possiedono la stessa forma ma hanno differenti dimensioni; vengono perciò detti *geometricamente simili*.

Se, inoltre, il rapporto tra i tempi nei quali il moto avviene nel prototipo e nel modello è costante, allora i due sistemi sono pure *cinematicamente simili*. Ciò equivale al rispetto delle prime due condizioni espresse dalla (20). Preso, dunque, un elemento fluido B_n nel prototipo che si trovi in posizioni indicate dai punti $1_n, 2_n, 3_n$ negli istanti t_{1n}, t_{2n}, t_{3n} , il corrispondente elemento fluido B_m nel modello occuperà posizioni $1_m, 2_m, 3_m$, geometricamente corrispondenti alle rispettive nel prototipo, negli istanti t_{1m}, t_{2m}, t_{3m} , tali per cui il rapporto fra gli intervalli di tempo corrispondenti è costante, cioè $(t_{2m}-t_{1m})/(t_{2n}-t_{1n}) = (t_{3m}-t_{2m})/(t_{3n}-t_{2n})$.

Se, infine, le masse delle entità coinvolte nel processo di moto sono riprodotte in modo che il rapporto fra le forze agenti nel prototipo e nel modello sia costante, allora i due sistemi si dicono *dinamicamente simili*. La similitudine dinamica deriva dal rispettare tutte le tre condizioni espresse dalla (20), requisito per altro indispensabile al fine di garantire la completa corrispondenza dei fenomeni fra modello e prototipo. I sistemi dinamicamente simili sono distinti da quelli cinematicamente simili dalla seguente condizione addizionale: le masse M_n e M_m di tutti gli elementi corrispondenti, in tempi corrispondenti, sono legate le une alle altre dalla medesima scala di riduzione λ_M .

Il rispetto della similitudine dinamica equivale a garantire l'invarianza di tutte le grandezze adimensionali Π in entrambi i sistemi.

Si può dimostrare che l'inverso di quest'ultimo enunciato è pure vero, cioè l'uguaglianza di tutte le grandezze adimensionali implica la similitudine dinamica del modello rispetto al prototipo (Yalin, 1971, pag. 41). Poiché, per assegnata geometria del sistema, tutte le grandezze adimensionali sono completamente determinate da $P = p - 3$ numeri puri indipendenti Π_i , ne consegue che la similitudine dinamica fra due sistemi è assicurata garantendo la similitudine geometrica e la conservazione di una combinazione di $p - 3$ grandezze adimensionali fra loro indipendenti.

Infatti, qualsiasi grandezza adimensionale Π_A relativa al moto del fluido dipende da $p - 3$ numeri puri indipendenti Π_i secondo la (12), di seguito richiamata per comodità,

$$\Pi_A = \varphi_A(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_p) \quad . \quad (24)$$

Ammesso quindi che i Π_i , con $i = 4, \dots, p$ siano invarianti, Π_A risulterà pure invariante a condizione che la funzione φ_A rimanga anch'essa immutata. Poiché φ_A dipende unicamente dalla geometria del sistema, ne consegue che la similitudine geometrica fra modello e prototipo è condizione necessaria affinché la grandezza adimensionale Π_A assuma in entrambi lo stesso valore.

Le relazioni che assicurano l'invarianza di $P = p - 3$ grandezze adimensionali,

$$\lambda_{\Pi_i} = 1 \quad \text{per } i = 4, \dots, p \quad , \quad (25)$$

sono dette *criteri di similitudine* del fenomeno considerato (Yalin, 1971, pag. 42).

In realtà nella pratica è di norma impossibile assicurare la conservazione di tutti i P numeri puri indipendenti che caratterizzano un fenomeno, se non per un preciso rapporto di riduzione dipendente dalle caratteristiche dei fluidi impiegati e dai valori

dell'accelerazione di gravità nei due ambienti. Poiché quest'ultima è pressoché costante e, almeno nei modelli fluviali, quasi sempre si utilizza il medesimo fluido, si trova che la conservazione dei P numeri puri, e cioè la perfetta similitudine dinamica fra modello e prototipo, si può avere solo se la scala di riduzione geometrica è 1:1. Cioè l'unico modello in perfetta similitudine dinamica col prototipo è il prototipo stesso e quindi la sperimentazione andrebbe fatta direttamente su di esso. Ne segue che non è possibile avere un modello in scala ridotta perfettamente simile al prototipo ed occorre accettare dei modelli solo parzialmente simili, cioè per i quali siano rispettate le condizioni di similitudine con riferimento non a tutte ma solo ad alcune delle forze agenti.

In pratica occorre fare delle scelte, cioè identificare quali sono le forze dominanti sul fenomeno e mantenere solo queste in rapporto costante fra loro. Nella maggior parte dei modelli di correnti a pelo libero queste sono la gravità e le forze di inerzia; la regola di scala che ne deriva, come verrà meglio illustrato nel seguito, è quella che deriva dalla conservazione del numero di Froude.

Per le correnti in pressione la gravità non è direttamente influente sul moto, ma solo in combinazione con le pressioni per il tramite del carico piezometrico; in questo caso si utilizza in genere la regola della conservazione del numero di Reynolds quando i fenomeni viscosi giocano un ruolo non trascurabile nel fenomeno (resistenza al moto per corpi arrotondati o pareti lisce) o del numero di Weber quando la tensione superficiale è dominante (la presenza o il processo di formazione di bolle risultano importanti).

4. I modelli di correnti a pelo libero in alveo a fondo fisso

4.1. Generalità

I modelli idraulici di correnti a pelo libero in alveo a fondo fisso sono generalmente realizzati quando si ha ragione di ritenere che la riproduzione dei processi di trasporto solido non sia strettamente necessaria. Ciò si verifica solitamente quando, al passaggio delle portate di progetto, il materiale di fondo alveo nel prototipo non è movimentato dalla corrente oppure, nel caso lo sia, quando si ha ragione di ritenere che le movimentazioni di materiale d'alveo siano ridotte, così da non causare sensibili variazioni della geometria delle sezioni trasversali. I modelli a fondo fisso sono caratterizzati dalla presenza di una superficie di fondo costituita da materiale coesivo, ad esempio malta di cemento. Tuttavia, questa condizione non è strettamente necessaria, potendo in genere l'alveo del modello essere costituito anche da sedimenti sciolti, a condizione però che essi si trovino, al passaggio delle portate di progetto, in condizioni di stabilità e quindi non possano essere movimentati dalla corrente.

4.2. Similitudine dinamica in una corrente a pelo libero

Il primo passo per identificare i criteri di similitudine da porre alla base della progettazione del modello è quindi quello di individuare i parametri caratteristici del fenomeno. La Tabella 3 riporta una possibile combinazione di detti parametri in

riferimento al caso di un fenomeno di moto vario di una corrente a pelo libero in alveo a fondo fisso.

Tabella 3. Parametri caratteristici del fenomeno di moto vario di una corrente a pelo libero in alveo a fondo fisso

Grandezza	Simbolo	Unità di misura
Raggio idraulico della sezione	R	m
Velocità della corrente	u	ms^{-1}
Accelerazione di gravità	g	ms^{-2}
Densità del fluido	ρ	Kgm^{-3}
Viscosità dinamica del fluido	μ	$Kgm^{-1}s^{-1}$
Pendenza del fondo	S	
Scabrezza equivalente	e_s	m

Il numero totale di parametri caratteristici in questo caso ammonta quindi a 7. E' il caso di ricordare che se il moto fosse permanente e uniforme, il numero dei parametri caratteristici potrebbe essere ridotto a 6, essendo in tal caso la velocità della corrente esprimibile in funzione dei parametri S , R e e_s . Potendo, nel più generale dei casi, il moto della corrente essere vario, fra i parametri caratteristici del fenomeno dovrebbe comparire anche il tempo T . Tuttavia, esso può essere tralasciato, a condizione che sia tenuto presente che, qualora il moto della corrente sia vario, la corrispondenza dei fenomeni fra il modello e il prototipo si verifica solo per istanti di tempo che si corrispondono, secondo la scala di riduzione dei tempi risultante.

In questo caso quindi il numero dei parametri caratteristici ammonta a sette, mentre in precedenza si è detto che i processi di meccanica dei fluidi possono essere in generale trattati introducendo nove parametri caratteristici. La ragione di tale riduzione discende dall'aver trascurato il tempo e dal ruolo trascurabile che la comprimibilità del fluido, la tensione superficiale e la pressione giocano nei processi di deflusso a pelo libero, sicché tali parametri possono essere ignorati. Il numero dei parametri caratteristici è quindi ridotto da nove a cinque, ai quali sono stati però aggiunti la pendenza del fondo e la scabrezza equivalente dell'alveo, poiché può essere utile adottare sia per le altezze che per le scabrezze equivalenti scale diverse da quelle che discendono dalla scala delle lunghezze geometriche λ_L . Si ottengono quindi in totale sette parametri caratteristici.

A differenza della comprimibilità e della pressione, gli effetti della tensione superficiale potrebbero non essere sempre trascurabili. L'esperienza pratica suggerisce di realizzare modelli in cui l'altezza d'acqua non sia inferiore a 2÷3 cm o di eventualmente aggiungere il fluido nel modello con sostanze tensioattive.

Esprimendo i rimanenti parametri caratteristici in funzione delle tre grandezze ρ , R e u , assunte come fondamentali, si ottiene il gruppo di variabili adimensionali

$$\Pi_1 = \frac{uR}{\nu}, \quad \Pi_2 = \frac{e_s}{R}, \quad \Pi_3 = S, \quad \Pi_4 = \frac{u^2}{gR}, \quad (26)$$

dove $\nu = \mu/\rho$ è la viscosità cinematica dell'acqua. Π_1 e Π_4 sono rispettivamente equivalenti ai numeri di Reynolds e Froude della corrente.

Se il modello ed il prototipo sono geometricamente simili, la similitudine dinamica è quindi assicurata dal soddisfacimento delle eguaglianze $\lambda_{\Pi_1} = 1$, $\lambda_{\Pi_2} = 1$, $\lambda_{\Pi_3} = 1$ e $\lambda_{\Pi_4} = 1$. Essendo $\lambda_R = \lambda_L$, tali relazioni si traducono nelle

$$\begin{cases} \lambda_u \lambda_L \lambda_\rho \lambda_\mu^{-1} = 1 \\ \lambda_{e_s} \lambda_L^{-1} = 1 \\ \lambda_s = 1 \\ \lambda_u^2 \lambda_g^{-1} \lambda_L^{-1} = 1 \end{cases} \quad (27)$$

E' possibile così selezionare liberamente la scala di tre grandezze dimensionalmente indipendenti mentre le scale dei rimanenti parametri ($7 - 3 = 4$) saranno determinate attraverso i criteri di similitudine esplicitati dalla (27). Nelle applicazioni pratiche, però, l'acqua viene utilizzata quasi sempre quale fluido nel modello in ragione del basso costo e dalla facile reperibilità. In tal caso si ottiene $\lambda_\mu = 1$ e $\lambda_\rho = 1$. Essendo anche l'accelerazione di gravità un parametro caratteristico che assume lo stesso valore sia per il modello che per il prototipo, si ha necessariamente $\lambda_g = 1$. Ne risulta, quindi, che i rapporti di scala di tre parametri caratteristici indipendenti sono uguali all'unità. Di conseguenza, saranno unitari anche i rapporti di scala delle rimanenti grandezze e tra queste, in particolare, λ_L . Ne consegue l'impossibilità, già menzionata in precedenza, di realizzare un modello in scala ridotta dinamicamente simile e quindi di poter riprodurre correttamente in scala ridotta la totalità dei fenomeni di interesse. E' quindi indispensabile limitarsi a realizzare un modello nel quale solo alcuni fenomeni sono simulati correttamente. Tale scopo si ottiene escludendo dal novero dei parametri caratteristici una o più grandezze, sicché il numero delle condizioni imposte dalle (27) risulti allo stesso modo ridotto in modo da ottenere uno o più gradi di libertà nella scelta delle scale. Dal punto di vista fisico ciò equivale a considerare trascurabile l'influenza sul moto del fluido di alcune forze agenti rispetto ad altre. Il modello così ottenuto è rappresentativo solo delle grandezze indipendenti dai parametri caratteristici che sono stati trascurati.

Ad esempio, se il moto del fluido si configura come assolutamente turbolento sia nel prototipo che nel modello, cioè se è verificata sia nel modello che nel prototipo la condizione

$$\frac{u^* e_s}{\nu} > \approx 70 \quad , \quad (28)$$

(un atteggiamento meno rigoroso può consentire di ridurre tale limite fino a 30) dove si è indicata con u^* la velocità d'attrito della corrente, allora la viscosità dinamica dell'acqua può essere esclusa dal novero dei parametri caratteristici, perché scarsamente influente sul processo di moto. Ciò equivale evidentemente a rinunciare alla similitudine del numero di Reynolds, che quindi risulterà diverso nel modello rispetto al prototipo. Tale semplificazione si traduce in un errore nella valutazione delle perdite di carico per attrito, errore che però è tanto meno sensibile quanto più il moto è turbolento; l'approssimazione

introdotta si riflette sulla riproduzione dei livelli e delle portate e quindi sulla corretta riproduzione del moto.

In conseguenza della mancata considerazione della viscosità dinamica, le condizioni espresse dalla (27) sono ridotte a tre. Un rapporto di scala può quindi essere liberamente scelto sicchè la realizzazione di un modello in scala ridotta ($\lambda_L < 1$) diviene possibile. Le scale dei rimanenti parametri caratteristici sono determinati dalla seguente versione ridotta della (27),

$$\begin{cases} \lambda_{e_s} = \lambda_L \\ \lambda_s = 1 \\ \lambda_u = \lambda_L^{1/2} \end{cases} \quad (29)$$

La scala di riduzione delle velocità risulta quindi uguale alla radice quadrata della scala di riduzione delle lunghezze geometriche. Codesta proprietà identifica i modelli realizzati in *similitudine di Froude*, nei quali il rapporto di scala di Re risulta pari a

$$\lambda_{Re} = \lambda_L^{3/2} \quad (30)$$

Essendo $\lambda_L < 1$, risulta $Re_n > Re_m$ e di conseguenza se ne deduce che in un modello a scala ridotta in similitudine di Froude le forze viscosse hanno sempre una rilevanza maggiore che nel prototipo. I principali rapporti di scala dei modelli in similitudine di Froude sono riassunti nella Tabella 4.

Tabella 4. Principali rapporti di scala dei modelli in similitudine di Froude

Grandezza	Definizione	Rapporto di scala
Velocità		$\lambda_u = \lambda_L^{1/2}$
Tempi	$T = L/u$	$\lambda_T = \lambda_L^{1/2}$
Pendenze	$S = h/L$	$\lambda_S = 1$
Numeri di Reynolds	$Re = 4Ru/\nu$	$\lambda_{Re} = \lambda_L^{3/2}$
Forze	$F = m a$	$\lambda_F = \lambda_L^3$
Portate	$Q = u A$	$\lambda_Q = \lambda_L^{5/2}$

Non sempre, come si vedrà più avanti, è possibile realizzare un modello geometricamente simile al prototipo in cui il fluido defluisce in condizioni di moto assolutamente turbolento sia nel prototipo che nel modello. In taluni casi, infatti, l'elevata riduzione di scala delle lunghezze geometriche rende impossibile il rispetto di tale condizione.

4.2.1 Criteri per definire il moto assolutamente turbolento e limiti di scala

Gli esperimenti di Nikuradse, condotti su tubi circolari caratterizzati da scabrezza omogenea, hanno evidenziato che il limite di separazione tra il moto in regime di transizione e quello in regime assolutamente turbolento, in cui la resistenza al moto non dipende più dalla viscosità, può essere definito dalla già richiamata condizione

$$\frac{u^* e_s}{\nu} \geq 70 \quad . \quad (31)$$

Poiché

$$u^* = u \sqrt{\frac{c}{8}} \quad , \quad (32)$$

dove c è il coefficiente di resistenza secondo Darcy-Weisbach, la (31) può anche essere scritta come

$$Re \sqrt{c \left(\frac{e_s}{4R} \right)} \geq 200 \quad . \quad (33)$$

L'estensione di questi criteri, derivati per il moto uniforme in una condotta in pressione, al caso delle correnti a pelo libero potrebbe apparire ingiustificato. In realtà i fenomeni che si manifestano nelle correnti a pelo libero sono evidentemente più complessi; i contorni del campo di moto sono più irregolari, poiché caratterizzati da curve, variazioni brusche di sezione ed altre singolarità che in ultima analisi sono una fonte aggiuntiva di turbolenza. Tale constatazione permette di attendersi che i limiti definiti da Nikuradse ed espressi dalle (31) e (33) siano in realtà cautelativi nel caso delle correnti fluviali. Anche in considerazione di ciò, come detto in precedenza, il valore limite al secondo membro della (31) si può ridurre a 30, così che il secondo membro della (33) diventa pari a circa 85. In similitudine di Froude il rispetto delle condizioni (31) e (33) nel modello implica che le medesime siano rispettate anche nel prototipo, come si desume sulla base del valore di λ_{Re} dato dalla (30).

Nel caso di alvei molto larghi, ricordando che il coefficiente c si può esprimere nella forma (Kobus, 1980, pag. 28)

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = 2.9 \left(\frac{e_s}{h} \right)^{-1/6} \quad , \quad (34)$$

la (33) si può esprimere come

$$Re \geq 2.35 \cdot 10^3 \left(\frac{e_s}{h} \right)^{-7/6} \quad . \quad (35)$$

Dividendo ambo i membri della (35) per $\frac{u_n^* e_{Sn}}{v}$, richiamando le espressioni date dalle (32) e (34) e ricordando che $\lambda_u = \sqrt{\lambda_L}$, si ottiene la disuguaglianza

$$\lambda_u \lambda_{e_s} > \approx \frac{70}{\frac{u_n^* e_{Sn}}{v}}, \quad (36)$$

dalla quale, poiché $\lambda_{e_s} = \lambda_L$, discende

$$\lambda_L^{\frac{3}{2}} > \frac{70}{\frac{u_n^* e_{Sn}}{v}}, \quad (37)$$

ossia

$$\lambda_L > \left(\frac{70}{\frac{u_n^* e_{Sn}}{v}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (38)$$

La (38) indica che la scelta della scala delle lunghezze è soggetta ad un *vincolo di tipo idraulico*, il cui soddisfacimento assicura che il deflusso della corrente nel modello (e a maggior ragione nel prototipo) avvenga in condizioni di moto assolutamente turbolento.

La (38) pone nella realtà severe restrizioni dal punto di vista pratico, poiché spesso fornisce dei valori del rapporto di scala delle lunghezze geometriche che risultano maggiori di 1/10, troppo grandi quindi per risultare accettabili sia tecnicamente che economicamente. In particolare tali restrizioni sono più stringenti nei modelli di tratti di fiume caratterizzati da valori di e_s/h ridotti, cioè nel caso degli alvei di pianura per i quali, invece, le spesso elevate dimensioni spaziali richiedono di adottare ridotti valori di λ_L .

Un altro vincolo che può impedire la realizzazione di un modello geometricamente simile al prototipo, anche quando si riesca ad operare con scale geometriche che rispettino la (38), è legato alla possibilità tecnica di realizzare scabrezze dell'alveo ridotte nella misura imposta dai relativi rapporti di scala.

Nel caso in cui la (38) non sia rispettata, si verifica che il deflusso del fluido avviene nel modello in condizioni di moto non assolutamente turbolento: ne consegue che l'effetto della viscosità non è più trascurabile. Come si evince dall'osservazione dell'abaco di Moody, dato che la scabrezza relativa e_s/h è la medesima nel modello e nel prototipo, ciò si traduce in un aumento delle resistenze al moto, il che impedisce la corretta riproduzione delle velocità e dei peli liberi nelle sezioni trasversali della corrente.

Per ovviare a tale circostanza, si può ricorrere alla realizzazione di *modelli distorti*, nei quali si abbandona la similitudine geometrica. In alternativa, si può compensare la

maggior resistenza aumentando la pendenza dell'alveo fluviale, come nei modelli inclinati che verranno trattati in seguito, oppure, se il fluido nel modello si trova nella regione di moto turbolento di transizione, riducendo adeguatamente la scabrezza.

4.3. I modelli distorti

Nel caso nel quale le condizioni imposte dalla (38) siano difficili da soddisfare in pratica, si può idealmente pensare di ovviare a tale inconveniente facendo in modo di incrementare i valori di Re nel modello, rispetto a quelli derivanti dalla similitudine di Froude in modelli indistorti. Tale obiettivo può essere raggiunto, ad esempio, incrementando il raggio idraulico R rispetto al valore $R_m = \lambda_L R_n$ proprio dei modelli in similitudine geometrica. A questo fine si può adottare una scala di riduzione geometrica più grande per le lunghezze verticali rispetto a quelle planimetriche; ciò provoca l'incremento dei tiranti idrici e di conseguenza del raggio idraulico. Tali modelli vengono detti *modelli distorti*. Per simulare correttamente le portate e i livelli la distorsione deve essere compensata attraverso un aumento del coefficiente di resistenza e quindi della scabrezza del modello.

Con la distorsione del modello, quindi, si ottiene il rilassamento di entrambi i vincoli prospettati nel paragrafo precedente, dovuti alle necessità di ottenere scabrezze tecnicamente riproducibili e di assicurare il deflusso del fluido in condizioni di moto assolutamente turbolento.

Il mancato soddisfacimento delle condizioni di similitudine geometrica può determinare condizioni di deflusso nel modello apprezzabilmente differenti da quelle caratteristiche del prototipo, poiché il rapporto fra le componenti orizzontali della velocità è diverso dal rapporto di quelle verticali. Il campo di applicazione dei modelli distorti è, quindi, in genere ristretto allo studio dei fenomeni nei quali la componente verticale di velocità risulta trascurabile. Inoltre è indispensabile che il moto della corrente sia piano, caratterizzato cioè dall'uguaglianza della distribuzione delle velocità su ogni verticale lungo una sezione trasversale. Questa circostanza assicura infatti che il moto sia indipendente dalla larghezza dell'alveo B e quindi dal rapporto B/h fra essa e il tirante idrico. Tali circostanze si verificano con buona approssimazione ad esempio nelle sezioni rettangolari molto larghe, con scabrezza uniformemente distribuita lungo il contorno bagnato. In generale, l'ipotesi di moto piano è maggiormente attendibile in riferimento alla zona centrale della sezione trasversale, per una larghezza B_c che si può ragionevolmente considerare pari a

$$B_c \cong B - 5h \quad , \quad (39)$$

definita quindi a condizione che il rapporto B/h sia maggiore di 5.

Tuttavia, riferendosi agli alvei fluviali naturali non si può certo ipotizzare che la scabrezza sia distribuita uniformemente nella sezione trasversale, per cui il limite del rapporto B/h espresso dalla (39) potrebbe non essere giustificato e comunque tanto meno attendibile quanto più è sensibile la variazione della scabrezza nelle diverse parti del contorno bagnato.

In pratica i modelli di opere o di singolarità della corrente, caratterizzati da modesta estensione in pianta, con accelerazioni verticali o trasversali non trascurabili e struttura intrinsecamente tridimensionale del moto, forte velocità e formazione di scie vorticose, vengono di regola eseguiti in similitudine di Froude non distorta. Invece, modelli di lunghi tronchi fluviali, nei quali la resistenza di parete controlla le perdite di carico possono in genere essere eseguiti con distorsione, entro i limiti sopra indicati.

4.3.1. Determinazione dei rapporti di scala nei modelli distorti

Poiché nei modelli distorti non è rispettata la similitudine geometrica del modello rispetto al prototipo, la determinazione dei rapporti di scala deve essere condotta con approccio diverso da quello usato in precedenza, che consisteva nell'imporre l'uguaglianza di un numero fissato di grandezze adimensionali. Tale metodo, infatti, garantisce la similitudine dinamica solo una volta che sia rispettata la similitudine geometrica. Risulta allora necessario, per i modelli distorti, determinare i rapporti di scala imponendo la conservazione del numero di Froude della corrente e delle leggi del moto delle correnti a pelo libero gradualmente variate (Kobus, 1980, pag. 31). Le scale di riduzione delle lunghezze verticali e orizzontali verranno nel seguito rispettivamente indicate mediante i simboli λ_{Lv} e λ_L , mentre con il simbolo δ si indicherà il fattore di distorsione dato dalla

$$\delta = \lambda_{Lv} / \lambda_L \geq 1 \quad . \quad (40)$$

Il soddisfacimento della similitudine di Froude richiede l'uguaglianza dei numeri di Froude nel modello e nel prototipo, cioè

$$\lambda_{Fr} = 1 \quad . \quad (41)$$

Il numero di Froude si può scrivere nella forma

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad , \quad (42)$$

ove h è l'altezza del pelo libero della corrente rispetto al fondo dell'alveo; considerando allora che $\lambda_g = 1$, dalle (41) e (42) è immediato ricavare la scala di riduzione delle velocità,

$$\lambda_u = \sqrt{\lambda_{Lv}} \quad , \quad (43)$$

oppure, in soluzione del tutto equivalente,

$$\lambda_u = \sqrt{\delta \lambda_L} \quad . \quad (44)$$

Di conseguenza, la scala di riduzione dei numeri di Reynolds, sempre nell'ipotesi di avere lo stesso fluido nel modello e nel prototipo, è data dalla relazione

$$\lambda_{Re} = \lambda_u \lambda_R = \lambda_u \frac{\lambda_A}{\lambda_P} \approx \lambda_u \frac{\lambda_L \lambda_{Lv}}{\lambda_L} = \lambda_u \delta \lambda_L = (\delta \lambda_L)^{3/2}, \quad (45)$$

nella quale con λ_R , λ_A e λ_P si sono indicati le scale rispettivamente dei raggi idraulici, dell'area e del perimetro bagnati. Quest'ultima scala è stata posta pari a λ_L , approssimazione accettabile per sezioni alquanto larghe. Si osserva che nei modelli distorti il numero di Reynolds del modello risulta maggiore rispetto a quello di modelli geometricamente simili, a parità di dimensioni planimetriche del modello.

La scala λ_S della pendenza di fondo si ricava dal rapporto fra le scale delle lunghezze verticali ed orizzontali ed è quindi pari a δ . La scala di riduzione del coefficiente di resistenza c secondo Darcy-Weisbach si ricava dalla definizione di c medesimo, espressa dalla

$$c = \frac{8RJg}{u^2}, \quad (46)$$

dalla quale si ricava

$$\lambda_c = \frac{\lambda_R \lambda_J}{\lambda^2 u} = \frac{\lambda_L \delta^2}{\delta \lambda_L} = \delta, \quad (47)$$

essendo $\lambda_J = \lambda_S = \delta$. Infine, la scala di riduzione delle scabrezze si ricava, nell'ipotesi di moto assolutamente turbolento, dalla formula di Chezy scritta per il modello e per il prototipo, da cui si ottiene

$$\lambda_u = \lambda_{e_s}^{-1/6} (\delta \lambda_L)^{2/3} \delta^{1/2}, \quad (48)$$

nella quale il coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler è stato espresso mediante la nota relazione di Miller

$$k_s = 26 e_s^{-1/6} \quad (49)$$

essendo e_s la scabrezza equivalente dell'alveo. Dalla (48) si ottiene

$$\lambda_{e_s} = \lambda_L \delta^4 \quad (50)$$

dalla quale discende immediatamente il rapporto di scala delle scabrezze relative e_s/h ,

$$\lambda_{e_s/h} = \delta^3 \quad (51)$$

Rimane così dimostrato che la scabrezza relativa di un modello distorto è sempre maggiore rispetto al prototipo; in precedenza è già stato evidenziato come questo costituisca uno dei principali vantaggi della distorsione.

La Tabella 5 mostra un confronto fra i principali rapporti di scala dei modelli distorti e indistorti, questi ultimi, è il caso di ricordarlo, ricavati imponendo la validità della formula di Chezy e quindi ammettendo che il moto sia assolutamente turbolento.

4.3.2. Limiti del rapporto di distorsione

Anche i modelli distorti sono ovviamente soggetti ad alcune limitazioni nella scelta delle relative scale. In particolare, il limite inferiore del rapporto di distorsione è ovviamente condizionato dall'esigenza di assicurare nel modello il deflusso del fluido in condizioni di moto assolutamente turbolento, che è proprio la finalità per la quale si introduce la distorsione. Il limite superiore del rapporto di distorsione è invece influenzato in primo luogo dalla necessità di non incrementare la scabrezza relativa e_s/h oltre un valore limite, che l'esperienza suggerisce pari a 0.2. Eccedendo tale valore, infatti, la legge di Darcy-Weisbach non è più teoricamente valida (Kobus, 1980, pag. 35; Yalin, 1971, pag. 125). Tale limite impone di adottare rapporti di distorsione che non eccedano un valore massimo che, in pratica, si aggira attorno a 5. In secondo luogo, un limite superiore al rapporto di distorsione è imposto dalla necessità di limitare gli effetti di scala originati dalla curvatura del tracciato della corrente. Infatti, secondo la teoria di Rozovskij (1957), a seguito dello squilibrio locale fra forza centrifuga in curva e gradiente delle pressioni, nascono correnti dirette verso l'esterno della curva in superficie e verso l'interno al fondo, che a regime, terminato cioè il comportamento transitorio legato al variare del raggio di curvatura r del tracciato, raggiungono velocità radiale u_r il cui rapporto di scala, rispetto alla velocità media della corrente, è espresso dalla relazione $\lambda_{u_r/u} = \delta$.

Tabella 5. Principali rapporti di scala dei modelli distorti e indistorti

Grandezza	Definizione	Modelli indistorti	Modelli distorti
Velocità		$\lambda_u = \lambda_L^{1/2}$	$\lambda_u = (\delta \lambda_L)^{1/2}$
Tempi	$T = L/u$	$\lambda_T = \lambda_L^{1/2}$	$\lambda_T = (\lambda_L / \delta)^{1/2}$
Pendenze	$S = h/L$	$\lambda_S = 1$	$\lambda_S = \delta$
Numeri di Reynolds	$Re = 4uR/\nu$	$\lambda_{Re} = \lambda_L^{3/2}$	$\lambda_{Re} = (\delta \lambda_L)^{3/2}$
Forze	$F = m a$	$\lambda_F = \lambda_L^3$	$\lambda_F = \lambda_L^3 \delta^2$
Portate	$Q = u A$	$\lambda_Q = \lambda_L^{5/2}$	$\lambda_Q = \lambda_L^{5/2} \delta^{3/2}$

In pratica, le correnti secondarie vengono cioè amplificate in modello rispetto al prototipo in ragione della distorsione. In natura le correnti secondarie hanno intensità dell'ordine del 5-10% della velocità media e se non troppo amplificate rimangono secondarie. Una eccessiva distorsione muta essenzialmente il meccanismo che limita le correnti secondarie.

Per tutto quanto sopra espresso è opportuno adottare rapporti di distorsione che non eccedano un valore massimo che dipende dalla curvatura del tracciato e comunque oscilla da 3 a 5.

Entro i limiti indicati la distorsione consente in pratica di incrementare il numero di Reynolds di parete fino a circa 50 volte rispetto ai modelli indistorti e consente quindi di

mantenere il comportamento assolutamente turbolento anche in modelli caratterizzati da un forte riduzione delle dimensioni in pianta.

4.4. I modelli inclinati (*tilted models*)

La maggiore resistenza al moto causata dall'assenza di condizioni di moto assolutamente turbolento può essere bilanciata, in ultima analisi, aumentando la pendenza dell'alveo nel modello, realizzando così quello che in gergo viene solitamente denominato un modello inclinato o "tilted model". Tale procedura, che veniva frequentemente applicata in passato, presenta l'inconveniente che il calcolo della pendenza in un alveo naturale richiede la specifica della direzione media di flusso. Ciò si presenta problematico in alvei con forti curvature e in alvei golenali, nei quali la direzione della corrente può essere variabile in dipendenza dalla portata liquida stessa. Per le medesime ragioni, l'aumento di pendenza necessario è dipendente dalla portata liquida, sicché ne consegue che spesso il modello risulta in grado di riprodurre correttamente solo il deflusso di un intervallo limitato di valori di portata (*Kobus*, 1980, pag. 40). Rimane infine da notare che la distorsione effettuata aumentando la pendenza comporta il corretto rispetto delle condizioni di similitudine solo se il moto del fluido è uniforme. I profili di moto permanente, al contrario, subiscono un'alterazione (*Adami*, 1994, pag. 78). L'insieme degli inconvenienti predetti fa sì che il "tilted model" sia oggi raramente utilizzato in pratica (*Kobus*, 1980, pag. 62).

4.5. I modelli a scabrezza ridotta

L'aumento della resistenza al moto, che si verifica quando la corrente nel modello non defluisce in condizioni di moto assolutamente turbolento ma bensì di moto turbolento di transizione, può essere in parte compensato anche riducendo la scabrezza dell'alveo, che quindi non risulta riprodotta secondo la similitudine geometrica. Tale provvedimento è tuttavia spesso scarsamente efficace nelle applicazioni pratiche, soprattutto nelle riproduzioni di alvei di pianura, caratterizzati quindi da scabrezze già di per se ridotte. Infatti, per ragioni tecniche la scabrezza non può ovviamente essere ridotta oltre il limite di alveo idraulicamente liscio, sicché tale provvedimento può non essere sufficiente a ripristinare la corretta resistenza al moto. Inoltre, come si desume dall'osservazione del diagramma di Moody, l'effetto del cambiamento di scabrezza sulla resistenza al moto è tanto più ridotto quanto più il fluido nel modello defluisce in condizioni lontane dalla regione del moto assolutamente turbolento.

La riduzione necessaria della scabrezza deve essere comunque calcolata imponendo che il coefficiente di resistenza c secondo Darcy-Weisbach assuma lo stesso valore nel modello e nel prototipo. In un modello in similitudine di Froude, il rispetto di tale condizione assicura la riproduzione corretta dei gradienti di energia e quindi della pendenza del pelo libero. Rimane tuttavia da considerare che la distribuzione della velocità nelle sezioni trasversali non verrà correttamente riprodotta dal modello (*Kobus*, 1980, pag. 14), il che potrebbe condurre ad una non corretta simulazione dei fenomeni di trasporto dei materiali da parte della corrente.

5. I modelli di correnti a pelo libero in alveo a fondo mobile

5.1. Generalità

In natura le correnti a pelo libero defluiscono in alvei il cui fondo è spesso costituito da materiale incoerente, che può essere trasportato e poi depositato dall'acqua. Quando, infatti, la tensione tangenziale esercitata dalla corrente sull'alveo supera un valore critico, determinato da vari studiosi con prove sperimentali, i sedimenti di fondo sono soggetti ad essere movimentati, dando così luogo al trasporto solido. Quest'ultimo influisce sulla configurazione del fondo d'alveo, che assume forme dipendenti dalle caratteristiche della corrente e del materiale trasportato. Tale modellamento induce una ulteriore resistenza al moto, che a sua volta dipende dalla geometria assunta dalle forme di fondo (ripples, dune, antidune, ecc.) e influisce sulle caratteristiche della corrente e, di conseguenza, sul trasporto solido. Si comprende, quindi, la necessità di analizzare il moto della corrente e dei sedimenti non separatamente, ma considerandoli come un unico processo bifasico. Le grandezze da includere nel novero dei parametri caratteristici sono quelle, relative alla natura del fluido e del materiale trasportato, che influenzano la dinamica del processo di trasporto solido.

5.2. Similitudine dinamica in una corrente a pelo libero su alveo a fondo mobile

La Tabella 6 riporta una possibile combinazione di parametri caratteristici del processo di trasporto di solido negli alvei fluviali, nell'ipotesi semplificativa che la corrente si muova di moto uniforme.

Tabella 6. Parametri caratteristici del fenomeno di moto uniforme di una corrente a pelo libero su alveo a fondo mobile.

Grandezza	Simbolo	Unità di misura
Tirante idrico	h	m
Accelerazione di gravità	g	ms^{-2}
Densità di massa del fluido	ρ	Kgm^{-3}
Viscosità dinamica del fluido	μ	$Kgm^{-1}s^{-1}$
Pendenza del fondo	S	
Densità di massa dei sedimenti	ρ_s	Kgm^{-3}
Diametro dei sedimenti	d	m

La caratterizzazione del materiale di fondo dell'alveo mediante l'indicazione di un unico diametro appare intuitivamente poco rappresentativa. Infatti, il materiale d'alveo in natura è costituito da una miscela di granuli, aventi dimensioni e forma eterogenee. Tuttavia, al fine di essere in grado di rappresentare nel modello il fenomeno, è necessario dare a tale materiale una rappresentazione semplificata, indicando quindi il diametro del materiale di granulometria omogenea che, al passaggio della corrente, dà luogo a fenomeni quanto più possibile simili a quelli che avvengono in realtà. Al fine dello studio dei fenomeni di trasporto solido, si assume di norma un diametro pari a quello del setaccio corrispondente al 50% del passante in peso del materiale naturale, diametro che in seguito verrà indicato come d_{50} . Quando invece si voglia analizzare la dinamica dei

fenomeni di erosione causati dalla corrente sull'alveo è più ragionevole riferirsi al d_{90} , per meglio tenere conto della capacità di corazzamento dell'alveo (armouring). E' evidente, comunque, che la simulazione del movimento dei sedimenti operata dal modello sarà tanto più attendibile quanto più la curva granulometrica adimensionale del materiale di fondo risulta simile a quella dell'alveo naturale.

A rigore anche la forma dei granuli influenza il moto dei sedimenti poiché, ad esempio, tra le forze che agiscono sul singolo granulo vi è anche la resistenza che questo oppone al passaggio della corrente, che per sua natura è strettamente connessa alla forma del granulo stesso. Tuttavia, l'evidenza sperimentale ha mostrato che la forma dei granuli riveste, nel processo di trasporto, un ruolo di importanza secondaria rispetto a quello esercitato dalle altre grandezze in gioco, sicché la sua corretta riproduzione può essere trascurata senza commettere significative imprecisioni.

Un problema che invece spesso è causa di notevoli imprecisioni è la riproduzione della coesione del materiale di fondo. Il più delle volte, infatti, il materiale coerente viene simulato sul modello con uno incoerente, introducendo quindi un'approssimazione in grado di influenzare, anche notevolmente, i risultati dell'esperimento. Infatti, il materiale coerente esercita una maggiore resistenza all'erosione, per ovvi motivi, sicché la simulazione da parte del modello dei fenomeni di scavo ad opera delle correnti può risultare sensibilmente diversa da quanto si verifica in realtà. La corretta riproduzione della coesione dei materiali di fondo nei modelli idraulici in scala ridotta è un problema tuttora ampiamente dibattuto.

Vi è infine da notare che l'insieme dei parametri caratteristici indicati nella Tabella 6 è stato determinato assumendo che il fluido che entra nel modello non trasporti materiale. Certamente, il fluido che scorre nel modello potrà caricarsi di materiale raccolto dal fondo mobile, ma in tal caso la concentrazione di detto materiale non potrà altro che essere una funzione dei parametri caratteristici precedentemente indicati. Viceversa, se una certa concentrazione di materiale è presente nel fluido già al momento in cui questo entra nel modello, evidentemente tale concentrazione iniziale potrà assumere qualunque valore fisicamente attendibile, in generale non dipendente dalle caratteristiche fisiche del modello. In tal caso, quindi, anche la concentrazione iniziale di materiale nel fluido dovrà essere inclusa fra i parametri caratteristici, il cui numero risulterà quindi incrementato di un'unità (Yalin, 1971, pag. 147).

Combinando fra loro i parametri caratteristici elencati nella Tabella 6 è possibile ricavare le quantità adimensionali la cui conservazione assicura la similitudine dinamica del processo di moto della corrente e dei sedimenti. Per ottenere risultati più significativi dal punto di vista fisico è conveniente sostituire due dei parametri caratteristici di Tabella 6, S e g , con i seguenti due parametri del tutto equivalenti

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gSh} \quad e \quad (52)$$

$$\gamma'_s = g(\rho_s - \rho) \quad , \quad (53)$$

in cui nella (52) si è assunta l'approssimazione $R \approx h$. Con u^* si è ancora indicata la velocità d'attrito della corrente, proporzionale alla tensione tangenziale τ_o esercitata sul contorno bagnato della sezione, dalla quale origina la forza di trascinamento dei grani; γ'_s indica invece il peso specifico del materiale d'alveo immerso.

Assumendo come parametri fondamentali ρ , u^* e μ si possono definire i seguenti numeri puri:

$$\Pi_1 = \frac{u^* d}{\nu}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho u^{*2}}{(\gamma_s - \gamma)d}, \quad \Pi_3 = \frac{h}{d} \quad \text{e} \quad \Pi_4 = \frac{\rho_s}{\rho}. \quad (54)$$

Π_1 , indicato solitamente con il simbolo Re^* , è il cosiddetto numero di Reynolds d'attrito e può essere interpretato come il rapporto fra le forze inerziali e viscosi che agiscono sul materiale di fondo. Π_2 , indicato solitamente con il simbolo Fr^* , è il numero di Froude d'attrito e può invece essere interpretato come il rapporto fra le forze inerziali e gravitazionali che agiscono sul materiale medesimo.

La conservazione delle quattro grandezze adimensionali espresse dalla (54) e la similitudine geometrica sono quindi condizioni necessarie e sufficienti per assicurare la similitudine dinamica del processo di moto uniforme di una corrente a pelo libero in alveo a fondo mobile. E' possibile dimostrare che le medesime condizioni assicurano la similitudine dinamica quand'anche il moto della corrente sia vario (Yalin, 1971, pag. 156). Le eguaglianze $\lambda_{\Pi_1} = 1$, $\lambda_{\Pi_2} = 1$, $\lambda_{\Pi_3} = 1$ e $\lambda_{\Pi_4} = 1$ costituiscono un sistema di quattro equazioni nelle sette incognite λ_μ , λ_ρ , λ_{ρ_s} , λ_h , λ_d , λ_{u^*} e $\lambda_{\gamma'_s}$. Utilizzando acqua quale fluido nel modello, si ha necessariamente $\lambda_\mu = 1$ e $\lambda_\rho = 1$; dalla necessità di imporre pure $\lambda_g = 1$ discende allora l'uguaglianza all'unità di tutte le altre scale e perciò l'impossibilità di realizzare un modello geometricamente simile in scala ridotta.

Analogamente alla trattazione svolta per i modelli a fondo fisso, diviene allora inevitabile rinunciare alla conservazione di alcune delle grandezze adimensionali espresse dalla (54), scelte fra quelle meno influenti sul processo di mobilitazione del materiale d'alveo.

5.3. Similitudine per le correnti caratterizzate da elevati valori del numero di Reynolds d'attrito

Analogamente al caso delle correnti a pelo libero defluenti su alveo a fondo fisso, la presenza di condizioni di moto assolutamente turbolento nel modello e nel prototipo rende la viscosità del fluido ininfluenza sulla dinamica del processo e consente quindi di poter trascurare senza errori significativi il rispetto della condizione $\lambda_{\Pi_1} = 1$. In riferimento ai processi di movimentazione del materiale di fondo d'alveo, la turbolenza si può ritenere completamente sviluppata quando Re^* è maggiore di un valore limite che può oscillare da 400 a 600, in dipendenza dal rigore con il quale viene condotta l'analisi. Infatti, l'abaco di Shields riportato in Figura 2 mostra come il valore di Fr^* in corrispondenza della curva di equilibrio limite sia effettivamente indipendente da Re^* quando quest'ultimo è superiore al limite indicato.

Il rispetto delle condizioni $\lambda_{\Pi_2} = 1$, $\lambda_{\Pi_3} = 1$ e $\lambda_{\Pi_4} = 1$ si traduce nei rapporti di scala

$$\begin{cases} \lambda_{u^*} = \sqrt{\lambda_h} \\ \lambda_d = \lambda_h \\ \lambda_{\rho_s} = 1 \end{cases} \quad (55)$$

Le condizioni espresse dalla (55) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite λ_{ρ_s} , $\lambda_h = \lambda_L$, λ_d , e λ_{u^*} , consentendo perciò la libera scelta di un rapporto di scala. Diviene quindi possibile l'adozione di una scala delle lunghezze inferiore all'unità e, di conseguenza, la realizzazione di un modello in scala ridotta.

I rapporti di scala sintetizzati dalla (55), riferiti quindi a modelli a fondo mobile, sono in accordo con quelli ricavati in precedenza e riferiti al caso di modello a fondo fisso in similitudine di Froude, espressi dalla (29) di seguito richiamata per comodità,

$$\begin{cases} \lambda_{e_s} = \lambda_L \\ \lambda_s = 1 \\ \lambda_u = \lambda_L^{1/2} \end{cases} \quad (56)$$

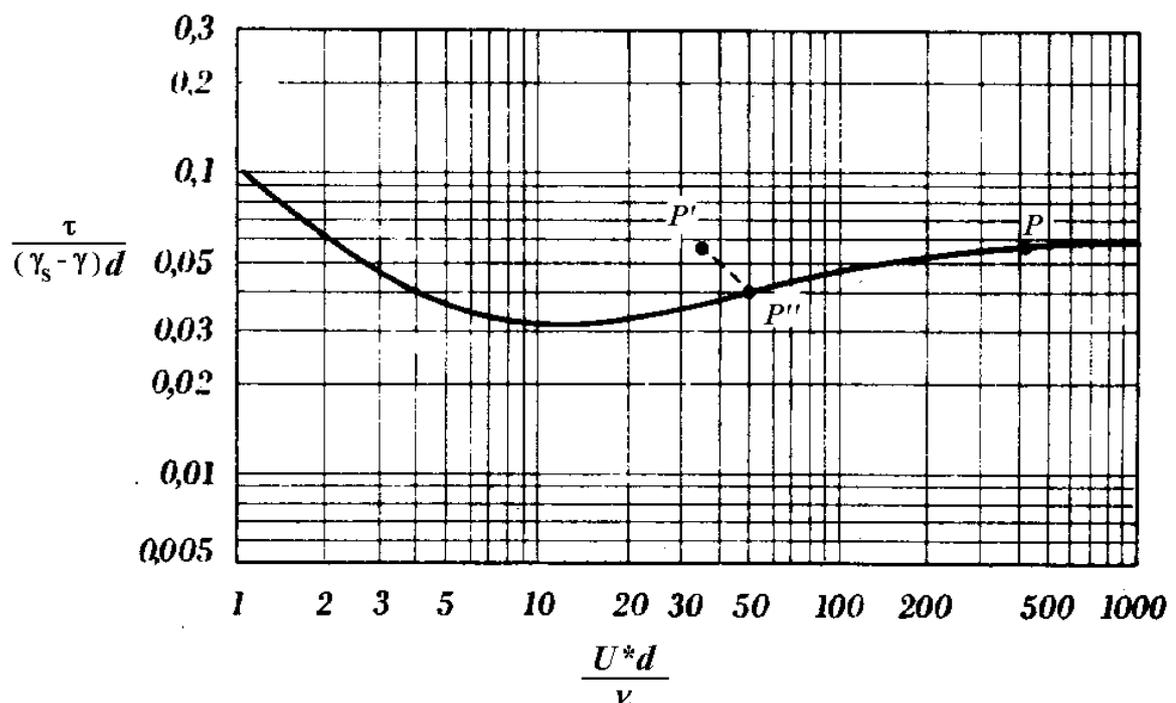


Figura 2. Abaco di Shields e determinazione del rapporto di scala dei sedimenti secondo il criterio di Supino.

Infatti il valore della scabrezza equivalente e_s si può ritenere proporzionale al valore di d_{50} e, essendo il modello non distorto, λ_h è coincidente con λ_L . Perciò si può scrivere

$$\lambda_{e_s} = \lambda_{d_{50}} = \lambda_d = \lambda_h = \lambda_L, \quad (57)$$

dimostrando così l'uguaglianza fra la seconda delle (55) e la prima delle (56).

Riassumendo, dalle (55) e (56) si possono desumere i seguenti rapporti di scala

$$\lambda_u = \lambda_{u^*} = \sqrt{\lambda_L}$$

$$\lambda_L = \lambda_d = \lambda_{e_s} \quad . \quad (58)$$

$$\lambda_S = \lambda_p = \lambda_{p_s} = 1$$

Il numero di Froude d'attrito, qui indicato con il simbolo Π_2 , coincide con il parametro di mobilità definito da Shields, che nelle condizioni di moto incipiente è funzione del numero di Reynolds di attrito secondo l'andamento rappresentato nel classico abaco di Shields, riportato nella Figura 2 (Marchi e Rubatta, 1981).

E' il caso di ricordare che la granulometria del materiale d'alveo non può essere ridotta oltre un valore che l'esperienza pratica suggerisce essere pari a 0.5 mm, al fine di evitare l'insorgere di fenomeni di coesione (Kobus, 1980, pag. 190).

La Tabella 7 riporta i principali rapporti di scala dei modelli a fondo mobile desunti dai criteri di similitudine appena richiamati.

Tabella 7. Principali rapporti di scala dei modelli a fondo mobile

Grandezza	Definizione	Rapporto di scala
Velocità		$\lambda_u = \lambda_L^{1/2}$
Tempi	$T = L/u$	$\lambda_T = \lambda_L^{1/2}$
Pendenze	$S = h/L$	$\lambda_S = 1$
Numeri di Reynolds	$Re = 4uR/\nu$	$\lambda_{Re} = \lambda_L^{3/2}$
Forze	$F = m a$	$\lambda_F = \lambda_L^3$
Portate	$Q = u A$	$\lambda_Q = \lambda_L^{5/2}$

5.3.1 Criteri per definire le condizioni di moto assolutamente turbolento e limiti di scala

In precedenza si è sottolineato come il moto assolutamente turbolento possa essere definito dalla condizione $Re^* > 400$. Tale condizione può essere scritta esplicitando il d_{50} del materiale di fondo, ottenendo così un vincolo di tipo idraulico sul diametro limite che può essere assunto dal materiale d'alveo nel modello. Dalla condizione

$$\Pi_{1_n} = \frac{u_n^* d_{50_n}}{\nu} > 400 \quad , \quad (59)$$

discende per la scala λ_d dei diametri

$$\lambda_d > \left(\frac{400}{\Pi_{1_n}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (60)$$

Essendo la velocità di attrito nel prototipo legata alla velocità media dalla

$$u_n^* = \frac{u_n}{c'} \quad (61)$$

ove $c' = \sqrt{8/c}$ e c è al solito il coefficiente di resistenza secondo Darcy-Weisbach, la (60) si può scrivere come

$$\lambda_d > \left(\frac{400c'}{\frac{u_n d_{50_n}}{v}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (62)$$

La presenza nel prototipo di condizioni di moto assolutamente turbolento consente di poter esprimere c nella forma (Yalin, 1971)

$$c' = 2.5 \ln\left(11 \frac{h}{e_s}\right) = 2.5 \ln\left(11 \frac{h}{D_{50}}\right) \quad (63)$$

Indicata con il simbolo q la portata per unità di larghezza d'alveo, ammettendo che il moto della corrente possa considerarsi piano, si può scrivere

$$u = \frac{q}{h} \quad (64)$$

sicché la (62) si può scrivere nella forma

$$\lambda_L = \lambda_d = \left(1000 \frac{u_n}{q_n} \Pi_{3_n} \ln(11 \Pi_{3_n}) \right)^{\frac{2}{3}} \quad (65)$$

dalla quale discende la condizione

$$d_{50_m} > \left[h_n \left(1000 \frac{u_n}{q_n} \right) \ln(11 \Pi_{3_n}) \right]^{\frac{2}{3}} (d_{50_n})^{\frac{1}{3}}, \quad (66)$$

che permette di verificare, una volta determinata la scala di riduzione del materiale d'alveo, se la corrente defluisce in condizioni di moto assolutamente turbolento nel modello e quindi anche nel prototipo.

5.4. Similitudine per le correnti caratterizzate da valori ridotti del numero di Reynolds d'attrito

La necessità di adottare per motivi di ingombro rapporti di scala geometrici piuttosto ridotti o la presenza di materiale d'alveo di granulometria molto fine, fanno sì che risulti spesso problematico assicurare la condizione $Re_m^* > 400$. Ne consegue che la viscosità del fluido gioca un ruolo non più trascurabile nella movimentazione dei sedimenti, sicché la condizione $\lambda_{\Pi_1} = 1$ non può essere trascurata.

Nella necessità di rinunciare al soddisfacimento di una delle rimanenti condizioni di similitudine, è opportuno ricordare che l'evidenza sperimentale ha mostrato come il processo di trasporto solido sia globalmente poco influenzato da ρ_s , qualora i sedimenti si muovano in massa (Shen, 1990). Ne consegue che la condizione relativa alla conservazione del numero adimensionale Π_4 può essere trascurata. Il rispetto delle prime tre condizioni di similitudine espresse dalla (54) conduce ai rapporti di scala

$$\begin{cases} \lambda_{u^*} = \lambda_d^{-1} \\ \lambda_h = \lambda_d \\ \lambda_{u^*} = \sqrt{\lambda_d \lambda_{\gamma'_s}} \end{cases} \quad . \quad (67)$$

La prima condizione assieme alla seconda implica che

$$\lambda_{u^*} = \lambda_h^{-1} \quad , \quad (68)$$

la quale, in condizioni di moto uniforme caratterizzate dall'uguaglianza

$$u^* = \sqrt{gSh} \quad , \quad (69)$$

si traduce nella

$$\lambda_{u^*} = \lambda_S^{\frac{1}{2}} \lambda_h^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (70)$$

e quindi nella

$$\lambda_S = \frac{1}{\lambda_h^3} \quad . \quad (71)$$

Di fatto, quindi, la costruzione di un modello nel rispetto di queste condizioni di similitudine implica una forte alterazione (in aumento) delle pendenze, che rende tale approccio difficilmente praticabile. Il rilassamento di un'altra condizione di similitudine diviene quindi condizione indispensabile per la realizzazione di un modello che consenta la conservazione del numero di Reynolds d'attrito.

Poiché la conservazione di Fr^* appare una condizione imprescindibile in questo contesto, la soluzione più ragionevole consiste nel rinunciare al soddisfacimento della condizione $\lambda_{\Pi_3} = \lambda_{h/d} = 1$, che equivale alla rinuncia al rapporto di scala geometrico nella

riproduzione della granulometria del materiale d'alveo. Tale approssimazione è accettabile solo nei casi nei quali la corretta riproduzione della scabrezza d'alveo non si configura come una condizione indispensabile per la corretta riproduzione in scala ridotta dei fenomeni indagati. Ciò avviene quando il modello interessa tratti d'alveo di limitata estensione e il trasporto solido si verifica nelle vicinanze del fondo, così che la traiettoria dei singoli grani sia poco influenzata dalla non corretta riproduzione della loro granulometria.

Il soddisfacimento delle sole condizioni $\lambda_{\Pi_1}=1$ e $\lambda_{\Pi_2}=1$ implica che

$$\begin{cases} \lambda_d = \lambda_{u^*}^{-1} \\ \lambda_{\gamma_s} = \lambda_{u^*}^3 \end{cases} \quad (72)$$

e siccome

$$\lambda_{u^*} = \sqrt{\lambda_s \lambda_h} = \sqrt{\delta \lambda_{Lv}} \quad , \quad (73)$$

ove con il simbolo δ si è ancora indicato il rapporto di distorsione fra le lunghezze verticali e quelle orizzontali, si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_d = 1/\sqrt{\delta \lambda_{Lv}} \\ \lambda_{\gamma_s} = \lambda_d^{-3} \end{cases} \quad , \quad (74)$$

ed essendo normalmente $\delta \lambda_{Lv} < 1$, risulta di conseguenza che $\lambda_d > 1$ mentre $\lambda_{\gamma_s} < 1$. Ciò significa che il materiale d'alveo nel modello deve essere costituito da granuli di dimensioni maggiori e peso specifico minore rispetto a quelli presenti nel prototipo. Questo tipo di similitudine è frequentemente utilizzata nello studio di prototipi caratterizzati da materiale d'alveo molto fine, sicché l'uso della granulometria maggiorata nel modello risulta tecnicamente possibile.

E' interessante notare che il rispetto delle condizioni $\lambda_{\Pi_1}=1$ e $\lambda_{\Pi_2}=1$ implica che il materiale nel modello sia scelto in modo tale che le condizioni di equilibrio limite dei sedimenti siano raggiunte nel modello e nel prototipo in occasione dei medesimi battenti idrici, a meno ovviamente del rapporto di scala. Infatti tali condizioni assicurano la corretta riproduzione in scala di Re^* e Fr^* , che sono le grandezze dalle quali dipende, ai sensi del diagramma di Shields riportato in Figura 2, la condizione di equilibrio limite.

Un elenco di materiali di ridotto peso specifico disponibili in commercio e più comunemente utilizzati nei modelli idraulici è riportato nella Tabella 8, unitamente al rapporto γ_s/γ tra il loro peso specifico e quello dell'acqua.

Tabella 8. Materiali di ridotto peso specifico utilizzati nei modelli idraulici

Materiale	γ_s / γ	Materiale	γ_s / γ
-----------	---------------------	-----------	---------------------

Antracite	1.40-1.70	Nylon	1.14
Bachelite	1.35-2.05	Polistirene	1.03-1.05
Carbone	1.20-1.50	PVC	1.35-1.38
Lignite	1.10-1.40	Silicone	2.40

Il polistirene è in pratica il materiale più leggero utilizzabile, poiché pesi specifici ancora più ridotti creerebbero problemi di galleggiamento.

Poiché il materiale d'alveo del prototipo, è caratterizzata da un valore di $(\gamma_s - \gamma) / \gamma$ pari a circa 1.65, la massima riduzione di scala dei pesi specifici utilizzabile in pratica risulta pertanto essere

$$\lambda_{\gamma_s} \geq \frac{0.03}{1.65} = \frac{1}{55} \quad (75)$$

La relazione di scala espressa dalla seconda delle (74) porge quindi l'intervallo di scala utilizzabile per la granulometria del materiale,

$$1 < \lambda_d < 3.8 \quad (76)$$

dal quale si evince che la dimensione del materiale d'alveo nel modello non può essere più di 3.8 volte maggiore della corrispondente dimensione nel prototipo.

Le relazioni di scala espresse dalle (74) sono state ricavate imponendo la conservazione di solo due numeri adimensionali, precisamente Π_1 e Π_2 . Ne consegue che la conservazione di tutte le rimanenti grandezze adimensionali non è automaticamente assicurata. Occorre perciò sincerarsi che il modello soddisfi anche le condizioni che assicurano la similitudine dei fenomeni idraulici che, nel caso generale di corrente non uniforme, possono essere espresse nella forma

$$\lambda_s = \frac{\lambda_{Lv}}{\lambda_L}, \quad \lambda_J = \frac{\lambda_{Lv}}{\lambda_L}, \quad \lambda_{Fr} = 1, \quad (77)$$

ove con J si è indicata la cadente della corrente, che esprime la perdita di carico totale per unità di lunghezza d'alveo. Si può dimostrare (Yalin, 1971, pag. 181-183) come tale condizione comporti la necessità di ricorrere ad un modello distorto, nel quale tuttavia non è possibile riprodurre correttamente la dinamica della formazione delle forme di fondo e quindi, a rigore, le dissipazioni energetiche indotte da queste ultime. L'approssimazione che ne consegue sarà tanto più sensibile quanto più le forme di fondo sono sviluppate e quanto più è esteso il tratto d'alveo riprodotto dal modello.

5.4.1. Similitudine per le correnti caratterizzate da valori ridotti del numero di Reynolds d'attrito e granulometria d'alveo grossolana

Nel paragrafo precedente si è evidenziato come la presenza di condizioni di moto non assolutamente turbolento comporti la necessità di imporre la conservazione il numero di Reynolds d'attrito, che si traduce nella necessità di costruire un modello distorto e di adottare un materiale d'alveo di granulometria maggiore nel modello rispetto al prototipo. Tuttavia, in precedenza si è evidenziato come i modelli distorti non siano idonei allo studio dei fenomeni di erosione localizzata; inoltre, come si è visto, l'incremento delle dimensioni dei sedimenti d'alveo nel passare dal prototipo al modello può essere problematico nel caso in cui già il prototipo sia caratterizzato da granulometria grossolana, come spesso accade nei tratti d'alveo montani. Ne consegue che la soluzione prospettata al paragrafo precedente non sempre è percorribile nelle applicazioni pratiche.

La mancata conservazione del numero di Reynolds d'attrito in condizioni di moto non assolutamente turbolento comporta l'alterazione delle condizioni di equilibrio limite delle particelle dell'alveo. Infatti, come già indicato, si osserva nell'abaco di Shields riportato in Figura 2 che per $Re^* < 400$ la condizione di equilibrio limite è apprezzabilmente influenzata da Re^* ; quindi una non corretta riproduzione di Re^* nel modello comporta la non fedele riproduzione dei fenomeni di movimentazione di materiale solido da parte della corrente.

Nel caso in cui, tuttavia, il modello sia concepito al fine principale di studiare i fenomeni di scavo localizzati ad opera della corrente, la similitudine di detti fenomeni può essere assicurata progettando il modello secondo il criterio di *Supino* (1964), che consiste nel rinunciare alla conservazione di Π_1 , Π_2 e Π_3 , imponendo però che le condizioni di movimento incipiente del materiale d'alveo di granulometria assegnata siano raggiunte per le medesime altezze idriche nel modello e nel prototipo, a meno ovviamente del rapporto di scala.

Tale approccio permette quindi l'utilizzo nel modello di sedimenti di peso specifico identico a quelli del prototipo. L'applicazione del metodo prevede innanzitutto la progettazione del modello secondo la similitudine di Froude, ipotizzando quindi in prima istanza che il numero Re^* nel modello sia elevato a sufficienza da garantire condizioni di moto assolutamente turbolento. In secondo luogo, è necessaria l'assunzione di una portata liquida di riferimento rispetto alla quale calcolare il rapporto di scala dei sedimenti. Occorre, quindi, determinare il diametro del materiale d'alveo che, al passaggio di detta portata di riferimento, si trova nel prototipo in condizioni di moto incipiente. Detto diametro deve, cioè, essere tale che i rispettivi valori dei numeri di Froude e Reynolds d'attrito, medi nel tratto d'alveo considerato, individuino un punto P (Figura 2) che, nell'abaco di Shields, si trovi esattamente sulla curva che, separando la regione di stabilità da quella di instabilità, individua le condizioni di equilibrio limite. Successivamente, si individua sul medesimo abaco di Shields il punto P' determinato dai valori di Re^* e Fr^* assunti nel modello, ancora nell'ipotesi che il materiale d'alveo sia ridotto secondo la scala delle lunghezze geometriche. Poiché il modello è stato progettato in similitudine di Fr^* , P e P' si troveranno su di una retta parallela all'asse delle ascisse. In conseguenza del diminuito valore di Re^* , il punto P' giacerà nella

regione dell'abaco superiore alla curva di equilibrio limite. Ne consegue che il materiale d'alveo, ridotto secondo la scala di riduzione geometrica, si troverà ora in condizioni di instabilità. Al fine di ripristinare le condizioni di equilibrio incipiente, è quindi necessario aumentare la granulometria del materiale medesimo, che quindi non sarà più ridotta secondo la scala geometrica. È facile rendersi conto che, al variare della granulometria del materiale d'alveo e a parità di tutte le altre condizioni, i numeri Re^* e Fr^* risultanti sono disposti lungo la retta passante per P' e inclinata di 45° rispetto all'orizzontale (Figura 2). Conducendo, quindi, da P' la retta medesima, si individua sulla curva di equilibrio limite il punto P'' , individuando così i numeri di Re^*_m e Fr^*_m corrispondenti. Essi consentono di ricavare la granulometria del materiale d'alveo che, nel modello, si trova in condizioni di movimento incipiente, in corrispondenza delle medesime condizioni idrauliche che nel prototipo determinano il moto incipiente, a meno ovviamente del rapporto di scala. Il rapporto fra il diametro dei sedimenti così trovato e il valore che questo assume in natura porge il rapporto di scala della granulometria del materiale d'alveo, che risulta diverso dal rapporto di riduzione delle lunghezze.

Merita di essere osservato che il modello così progettato non riproduce correttamente la scabrezza dell'alveo e quindi la resistenza al moto, la quale risulterà peraltro incrementata anche per motivi strettamente idraulici, in ragione della riduzione del numero di Reynolds oltre il limite della regione che definisce condizioni di moto assolutamente turbolento. Ne consegue la necessità di procedere, prima della realizzazione delle prove vere e proprie, ad operazioni di taratura, finalizzate alla verifica della corretta riproduzione del livello del pelo libero. Se il tratto d'alveo riprodotto non è eccessivamente esteso, l'approssimazione introdotta è accettabile; se l'evidenza sperimentale non fosse tale, occorre intervenire sul modello, modificandone la scabrezza ed eventualmente la pendenza.

Il modello progettato secondo il criterio di Supino non riproduce correttamente le azioni tangenziali esercitate dalla corrente, ma solo lo stato di equilibrio limite dei sedimenti al passaggio della portata di riferimento. A rigore, il modello è quindi idoneo alla riproduzione di un intervallo limitato di valori di portata e particolare cautela deve essere posta nella valutazione di risultati di prove condotte con portate liquide sensibilmente diverse da quella di riferimento. In tal caso, può essere opportuno ripetere il calcolo del rapporto di scala dei sedimenti assumendo diverse portate di riferimento, per avere un'idea dell'entità dell'approssimazione introdotta.

I rapporti di scala caratteristici del modello sono i medesimi riportati nella Tabella 7 (con l'avvertenza che ora $\lambda_d \neq \lambda_L$).

6. Esempi di modelli idraulici di correnti a pelo libero

5.1. Modello a fondo mobile del Fiume Reno in prossimità di Sasso Marconi

Il modello a fondo mobile del Fiume Reno in prossimità dell'abitato di Sasso Marconi è stato realizzato nel 1999 presso il laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, allo scopo di analizzare l'evoluzione della morfologia del fondo d'alveo conseguente alla realizzazione del nuovo attraversamento fluviale previsto dal Progetto della Variante di Valico dell'autostrada A1 Bologna-Firenze. Precisamente, attraverso il modello si intende accertare la presenza di eventuali fenomeni di escavazione, ad opera della corrente, in prossimità delle nuove pile del ponte in progetto, verificando così la funzionalità delle protezioni al piede previste nel Progetto stesso.

Il nuovo attraversamento dell'autostrada sarà realizzato immediatamente a valle del ponte autostradale esistente, il quale a sua volta si trova subito a valle del cosiddetto Ponte Albano, situato sulla viabilità congiungente la zona settentrionale dell'abitato di Sasso Marconi con il casello autostradale. Il tronco fluviale nel quale sorgerà il nuovo viadotto sarà quindi caratterizzato dalla presenza di tre attraversamenti d'alveo posti in rapida successione e di una traversa posta a valle del ponte autostradale esistente a protezione delle fondazioni dello stesso. La complessità idraulica del nodo fluviale interessato ha reso consigliabile la realizzazione di un modello idraulico in scala ridotta. La Figura 3 mostra una vista dall'alto del tronco fluviale riprodotto, nella quale sono evidenti i due attraversamenti esistenti. Le figure dalla 5 alla 7 mostrano invece alcune immagini del modello finito prima dell'esecuzione delle prove, mentre la figura 8 riporta un'immagine ripresa durante l'esecuzione di una prova su modello con portata corrispondente a $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ nel prototipo.



Figura 3. Vista dall'alto del tratto d'alveo fluviale riprodotto nel modello. Il senso di scorrimento della corrente è da sinistra verso destra nella foto.

5.1.1. Descrizione del tratto d'alveo fluviale riprodotto

Il tratto d'alveo riprodotto dal modello è localizzato nelle immediate vicinanze di Sasso Marconi, in provincia di Bologna, ed ha una lunghezza complessiva di circa 1100 metri, con pendenza di fondo media pari al 3 per mille. La morfologia dell'alveo è stata caratterizzata mediante il rilievo di dettaglio di 30 sezioni trasversali ed il rilievo di dettaglio di tutti i manufatti. La sezione fluviale è di tipo composto, formata da un alveo di magra e da due golene laterali. Il materiale di fondo è costituito, nell'alveo di magra, in prevalenza di ciottoli alluvionali, mentre nelle due golene detti ciottoli sono frammisti ad una matrice di materiale più fine e il tutto è ricoperto da abbondante vegetazione. L'alveo di magra è diviso dalle golene da argini golenali costituiti da materiale costipato e coerente.

Poiché il modello idraulico è stato realizzato con alveo a fondo mobile, al fine ovvio di essere in grado di valutare gli scavi prodotti dalla corrente, la caratterizzazione della granulometria del materiale d'alveo assume fondamentale importanza al fine di riprodurre correttamente in scala ridotta i sedimenti di fondo. La granulometria di questi ultimi è stata rilevata eseguendo 3 sondaggi, tutti in sponda destra, che si sono aggiunti ai vari altri sondaggi contenuti nel Progetto. Il primo (S1) in prossimità dell'alveo di magra, circa 20 metri a valle della traversa posta nelle immediate vicinanze del ponte autostradale esistente. Gli altri due sondaggi (S2 e S3) sono stati eseguiti in golena, rispettivamente 80 e 200 metri a valle della traversa predetta. I sondaggi sono stati realizzati rimuovendo innanzitutto il materiale grossolano superficiale, risultato del corazzamento dell'alveo, ed eseguendo uno scavo fino alla profondità di 1,2 m rispetto al piano di campagna, dal cui materiale di risulta, opportunamente rimescolato, è stato prelevato il campione da sottoporre ad analisi granulometrica.

La Figura 3 mostra le curve granulometriche risultanti dai 3 sondaggi e la curva granulometrica media.

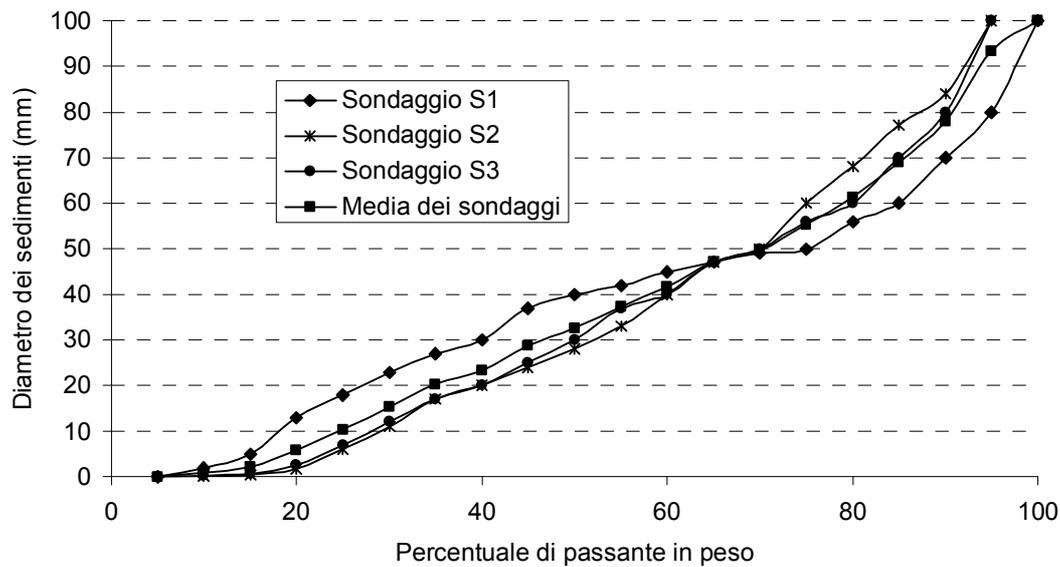


Figura 4. Curve granulometriche del materiale d'alveo risultanti dai 3 sondaggi effettuati e curva granulometrica media.

5.1.2. Descrizione degli interventi in progetto

Il viadotto in progetto sul Fiume Reno sarà sorretto da quattro pile, poste nell'alveo di magra, e altre poste nella gola di sinistra. Al fine di evitare fenomeni di erosione localizzati in corrispondenza del basamento delle pile in alveo, è stata prevista la posa in opera di manufatti di protezione. Essenzialmente, questi consistono di una difesa in gabbioni posta in sponda sinistra, raccordata all'alveo mediante un mantello di massi naturali. Tali gabbionate hanno la funzione di prevenire fenomeni di erosione dell'argine posto a ridosso dell'alveo di magra, a margine della gola di sinistra. Sempre in sponda sinistra sarà realizzata una mantellata di massi sciolti naturali, aventi ciascuno volume pari a circa 1 metro cubo, a protezione del basamento delle pile in alveo, al fine di evitare fenomeni di erosione localizzati. In sponda destra è invece prevista la realizzazione di una gabbionata a protezione dei basamenti delle pile, che sarà raccordata all'alveo mediante un mantello di massi sciolti anch'essi del volume di circa 1 metro cubo.

Le prove realizzate su modello hanno la finalità essenziale di verificare l'idoneità delle protezioni previste al fine di evitare fenomeni di erosione localizzata, al passaggio di portate di piena caratterizzate da diversi tempi di ritorno fino ad un valore massimo pari a $3000 \text{ m}^3/\text{s}$, alla quale studi eseguiti in occasione del Progetto portano ad attribuire un tempo di ritorno superiore a 1000 anni.



Figura 5. Vista da valle del modello finito prima dell'esecuzione delle prove (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1999)



Figura 6. Particolare del modello finito prima dell'esecuzione delle prove. In primo piano le pile dell'attraversamento autostradale esistente visto da monte, in secondo piano le quattro pile del ponte in progetto poste in alveo (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1999).

5.1.3. Descrizione delle strutture di laboratorio disponibili

Il modello fisico è stato realizzato nel laboratorio di Ingegneria Idraulica della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Bologna, che dispone di una vasca impermeabilizzata avente superficie complessiva pari a 73 m^2 circa, di dimensioni planimetriche pari a circa 15 metri di lunghezza e 5 metri di larghezza. La vasca è dotata di un sistema di ricircolo dell'acqua composto da tre pompe sommergibili ad iniettore, di potenza pari a 5.5 HP cadauna e portata pari a 14 l/s per prevalenza pari a 15 m . Le pompe sono immerse in una vaschetta, con fondo sagomato a tramoggia, ove vengono raccolti l'acqua e il materiale solido trasportato dalla corrente. L'acqua proveniente dalla mandata delle pompe ricircola per mezzo di tre condotti di diametro pari a 200 mm e

lunghezza di circa 13,5 m, inclinati con pendenza del 2 per mille nel senso del moto onde favorire il trasporto del materiale solido di cui si carica la corrente. Tutte le tubazioni sono in acciaio. Il livello idrico nella vaschetta di alloggiamento delle pompe è regolabile al fine di impostare la condizione al contorno di valle desiderata.



Figura 7. Vista da valle del modello finito prima dell'esecuzione delle prove (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1999).

5.1.4. Rapporti di scala del modello

Il rapporto di scala delle lunghezze geometriche è stato determinato in modo da consentire, nella vasca disponibile, la riproduzione di un tratto d'alveo di lunghezza adeguata allo studio del problema. Il rapporto λ_L scelto, pari a 1/100, consente di riprodurre circa 600 metri di alveo a monte del manufatto in progetto e circa 500 metri a valle. Il numero di Reynolds della corrente nel prototipo Re_n assume nel tratto d'alveo riprodotto, al passaggio della portata di $3000 \text{ m}^3/\text{s}$, un valore medio di 50.983.000. Progettando il modello in similitudine di Froude, ne consegue un valore di Re_m pari a 50.983; nel modello il moto della corrente non risulta assolutamente turbolento bensì in zona di transizione. La granulometria del materiale d'alveo è tale che anche il valore di Re^* risulta ridotto in scala in modo tale da non rientrare nei limiti che assicurano condizioni di moto assolutamente turbolento. Re_n^* è stato calcolato assumendo il d_{90} , risultato dai sondaggi eseguiti pari a circa 75 mm, quale diametro caratteristico di riferimento del materiale d'alveo, essendo il modello finalizzato allo studio di fenomeni di erosione localizzata.

Calcolando la scabrezza k_s secondo Strickler con la formula

$$k_s = 26 d_{90}^{-1/6} \quad , \quad (78)$$

risulta $k_s = 40 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$. In corrispondenza delle golene, in considerazione della vegetazione ben sviluppata, si può assumere un valore pari a $15 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$. Poiché la portata di $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ defluisce occupando estesamente la zona golenale, il coefficiente di Strickler medio dell'alveo è stato assunto pari a circa $25 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$. Ne conseguono valori della cadente media e di Re_n^* nel tratto d'alveo considerato pari rispettivamente a 0.0023 e 14.100. Ne

risulta un valore di $Re_m^* = 14.1$, che evidenzia ancora una volta l'assenza di condizioni di moto assolutamente turbolento.

La progettazione del modello in similitudine contemporanea di Re^* e Fr^* è apparsa irrealizzabile, poiché avrebbe comportato l'utilizzo di materiale d'alveo nel modello di granulometria maggiore rispetto al prototipo, soluzione non praticabile viste le dimensioni non troppo ridotte del sedime d'alveo nel prototipo. Si è quindi optato per realizzare il modello secondo il criterio di Supino.

Il calcolo del rapporto di scala dei sedimenti richiede innanzitutto l'assunzione di una portata di riferimento, che in prima istanza è stata ipotizzata pari a $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, con l'intento successivamente di ripetere il calcolo anche per valori diversi. Lo sforzo tangenziale alla parete τ_0 medio del tratto d'alveo preso in considerazione risulta pari a $52,21 \text{ N/m}^2$.

La corrispondente velocità di attrito media u_n^* nel prototipo è pari a

$$u_n^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = 0.228 \text{ m/s} \quad . \quad (79)$$

In prima istanza, non conoscendo il diametro dei sedimenti in condizioni di equilibrio limite, si è supposto di ricadere nel ramo della curva di Shields nel quale Fr^* , in condizioni di equilibrio limite, risulta indipendente da Re^* e pari a

$$Fr_* = \frac{\tau_0}{\gamma_s' d} = 0,058 \quad , \quad (80)$$

con $\gamma_s' = g(\rho_s - \rho) = 16200 \text{ N/m}^3$.

Risolvendo la (80) in funzione di d si è ottenuto diametro del materiale in condizioni di equilibrio limite, pari a 5.54 cm . Il valore di Re^* nel prototipo è risultato pari a 13.118 , confermando l'assunzione precedentemente effettuata. Utilizzando il criterio di Supino di corrispondenti condizioni idrauliche, nel modello e nel prototipo in condizioni di moto incipiente, si è ottenuto $Re_m^* = 22.85$ e $Fr_m^* = 0.033$ ed un valore del diametro del materiale d'alveo nel modello pari a 0.097 cm . La scala di riduzione del materiale d'alveo, che discende dal rapporto fra i due diametri di equilibrio limite, è perciò risultata pari a circa $1/57$.

E' importante notare che, in accordo allo schema adottato, si trovano a rigore in condizioni di similitudine solo i due diametri che nel modello e nel prototipo si trovano in condizioni di equilibrio limite. I diametri maggiori risulteranno invece più stabili nel modello rispetto al prototipo, viceversa per i diametri minori. Al fine di chiarire la sensibilità della scala di riduzione del materiale d'alveo al valore scelto della portata di riferimento, si è ripetuto il medesimo calcolo assumendo una portata di riferimento pari a $2000 \text{ m}^3/\text{s}$. La scala risultante di riduzione del materiale d'alveo è risultata pari a $1/60$, quindi non sensibilmente diversa dalla scala precedentemente adottata, che quindi è stata assunta definitivamente quale scala di riduzione dei sedimenti.

Riassumendo il modello è caratterizzato dalle seguenti scale fondamentali: $\lambda_L = 1:100$, $\lambda_d = 1:57$, $\lambda_{y_s} = 1:1$, $\lambda_s = 1:1$, $\lambda_Q = 1:100000$ (Brath, 1999).

Le scale adottate dovrebbero a rigore causare un lieve aumento della resistenza al moto, dovuta all'azione congiunta della minore turbolenza del fluido e della maggiore scabrezza del materiale d'alveo, rispetto a quella che si sarebbe verificata riscalando il diametro dei sedimenti secondo la scala di riduzione geometrica. Tuttavia, i risultati delle prove preliminari, finalizzate alla verifica operativa del modello, hanno evidenziato come i profili del pelo libero osservati per diversi valori di portata riproducano sostanzialmente bene quelli desunti dai calcoli idraulici del Progetto, confermando così l'accettabilità della soluzione prescelta. Le medesime prove preliminari hanno prefigurato un'evoluzione morfologica dell'alveo, per diverse portate di prova, attendibile in quanto compatibile con i rilievi effettuati sul prototipo.



Figura 8. Vista da valle del modello durante l'esecuzione di una prova con portata pari a $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1999).

5.2. Modello idraulico del regime di piena del Fiume Arno entro la città di Firenze

Il modello idraulico del regime di piena del Fiume Arno entro la città di Firenze, nel tratto compreso tra il Ponte alle Grazie e la traversa S. Rosa, è stato realizzato nel 1972 presso il laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna. Le esperienze su di esso condotte avevano un triplice scopo (Cocchi, 1972). In primo luogo stimare l'andamento del profilo del pelo libero, con geometria dell'alveo fluviale corrispondente allo stato di fatto, per portate prossime alla massima contenibile in alveo. In secondo luogo determinare il rigurgito, provocato dalla medesima portata massima, una volta operate sull'alveo le sistemazioni previste da diverse alternative progettuali. In terzo luogo determinare un nuovo valore della portata massima contenibile, in seguito alla realizzazione delle sistemazioni predette, che prevedevano abbassamenti alla platee del Ponte Vecchio, del Ponte di Santa Trinita e, eventualmente, del Ponte alle Grazie. Tali

sistemazioni fluviali sono state adeguatamente dettagliate dalla committenza mediante elaborati di progetto.

5.2.1. Descrizione del tratto d'alveo riprodotto

Il modello riproduceva il tratto del Fiume Arno, contenuto fra muri di sponda, compreso fra le sezioni trasversali localizzate circa 100 metri a monte del Ponte alle Grazie e in corrispondenza della traversa di Santa Rosa. La morfologia dell'alveo è stata definita mediante un rilievo di dettaglio del tratto da riprodurre. Il materiale di fondo, caratterizzato mediante idonee campionature, è risultato costituito da massi di notevoli dimensioni, risultato di secolari discariche, che nel modello sono stato riprodotti disponendo della ghiaia di frantoio delle dimensioni pari a 8 *mm*. I manufatti in alveo presenti in detto tratto, riprodotti dal modello, sono il Ponte alle Grazie, il Ponte Vecchio, il Ponte Santa Trinità, il Ponte alla Carraia e la Pescaia di Santa Rosa. I ponti sono stati realizzati in legno e successivamente verniciati al fine di ottenerne l'impermeabilizzazione. La Pescaia di Santa Rosa è stata eseguita in muratura, mentre le platee sotto i ponti sono state realizzate in malta di cemento. Si sono poi riprodotte opere minori, come la fila di archi ciechi che corre, in sponda destra, a monte e a valle del Ponte alle Grazie, alcune rampe e scale che discendono sull'alveo e le spallette lungo tutto il corso del fiume. Si è posta la massima attenzione per riprodurre fedelmente, secondo i disegni forniti dalla committenza, soprattutto le parti interessate dal deflusso della corrente, indulgendo nel contempo anche a riprodurre sovrastrutture e dettagli che, se pur non influenti dal punto di vista idraulico, potessero dare al modello un aspetto completo, al fine di rendere più agevole la percezione della similitudine modello-prototipo anche ai non addetti ai lavori.

5.2.2. Rapporti di scala del modello

Il modello è stato realizzato secondo la similitudine di Froude, con scala di riduzione delle lunghezze geometriche pari a 1/60. Detta scala permetteva di apprezzare compiutamente le grandezze di interesse e risultava compatibile con gli spazi disponibili nel laboratorio. Il numero di Reynolds nel modello era tale da permettere il deflusso della corrente nel modello in condizioni di moto assolutamente turbolento, così da consentire la realizzazione di un modello indistorto. Le prime prove eseguite sul modello hanno evidenziato come il livello del pelo libero risultante fosse sostanzialmente congruo con i dati osservati disponibili. Le figure dalla 9 alla 13 mostrano dei particolari dei manufatti riprodotti e delle immagini riprese durante il passaggio di una portata pari a 3320 m^3/s .



Figura 9. Vista da monte del Ponte Vecchio sul Fiume Arno a Firenze come rappresentato nel modello (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1972).



Figura 10. Vista da valle del Ponte Vecchio sul Fiume Arno a Firenze come rappresentato nel modello (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1972).



Figura 11. Il Ponte di Santa Trinità sul Fiume Arno a Firenze come riprodotto nel modello, al passaggio nel prototipo della portata pari a $3320 \text{ m}^3/\text{s}$ (vista da monte, Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1972).

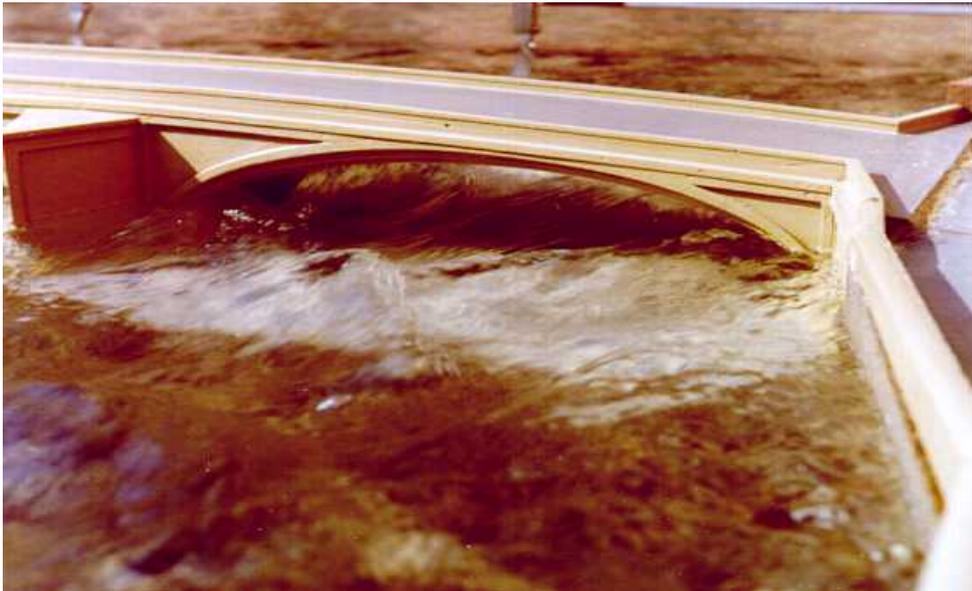


Figura 12. Il Ponte di Santa Trinità sul Fiume Arno a Firenze come riprodotto nel modello, al passaggio nel prototipo della portata pari a $3320 \text{ m}^3/\text{s}$ (vista da valle, Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1972).



Figura 13. Vista da valle del Ponte Vecchio sul Fiume Arno a Firenze come rappresentato nel modello, al passaggio della portata nel prototipo pari a $3320 \text{ m}^3/\text{s}$ (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1972).



Figura 14. Vista da valle del Ponte Vecchio sul Fiume Arno a Firenze come rappresentato nel modello, al passaggio nel prototipo della portata pari a $3320 \text{ m}^3/\text{s}$ (Laboratorio di Ingegneria Idraulica dell'Università degli Studi di Bologna, 1972).

5.2.3. Risultati delle prove condotte

Le prove condotte hanno consentito di evincere la funzionalità dei diversi interventi di modifica dell'alveo in progetto. In particolare è stato messo in evidenza come

l'abbassamento di un metro delle platee del Ponte di Santa Trinità consentisse di incrementare la portata massima contenibile in alveo da 3120 m^3/s a 3320 m^3/s . Il medesimo intervento effettuato sulle platee del Ponte Vecchio consentiva invece solo un minimo aumento della capacità di deflusso. Il modello ha altresì evidenziato che l'abbassamento delle platee del Ponte di Santa Trinità causava un notevole rigurgito a monte del Ponte Vecchio e la presenza di notevoli turbolenze a valle del medesimo. L'abbassamento delle platee di entrambi i ponti consentiva invece di elevare la portata massima fino a circa 3500 m^3/s , senza creare i menzionati problemi di rigurgito e turbolenza.

5. Riferimenti bibliografici

- ADAMI A., *I modelli fisici nell'idraulica*, CLEUP, Padova, 1994.
- ANGELICO G., L'uso dei modelli nella scienza e nella tecnica e in particolare nell'idraulica sperimentale, *L'Energia Elettrica*, vol. 3, 1996.
- BRATH A., *Modello idraulico a fondo mobile del Fiume Reno in prossimità di Sasso Marconi, risultati della campagna di prove*, DISTART, Università degli Studi di Bologna, Bologna, 1999.
- COCCHI G., *Studio su modello idraulico del regime di piena del Fiume Arno entro la città di Firenze, nel tratto compreso tra il Ponte alle Grazie e la traversa S. Rosa*, Istituto di Idraulica, Università degli Studi di Bologna, Bologna, 1972.
- ENGELUND F. e HANSEN E., *The Hydraulic Resistance of Alluvial Streams*, Tech. Univ. of Denmark, Coastal Eng. Lab., Basic Research Progress Rep. 8, 1965.
- GRANGER R.A., *Fluid Mechanics*, Dover Publication, New York, 1996.
- KOBUS H., *Hydraulic modelling*, Bulletin n°7 of the German Association for Water Resources and Land Improvement, Amburg, 1980.
- MARCHI E. e RUBATTA A., *Meccanica dei fluidi*, UTET, Torino, 1981.
- MASSEY B.S., *Measures in Science and Engineering*, Ellis Horwood, Chichester, 1986.
- MILANO V. e SASSOLI F., Sui modelli fluviali a fondo mobile, *L'Energia Elettrica*, vol. 4, 1976.
- ROZOVSKIJ I. L., Correnti nelle curve dei canali, *Acc. delle Scienze della Repubblica Ucraina*, Istituto di Idrologia e Ingegneria Idraulica, Kiev, 1957
- SHEN H. W., *Movable bed physical models*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- SUPINO G., *Le reti idrauliche*, Patron, Bologna, 1964.
- YALIN M.S., On the average velocity of a flow in a mobile bed, *La Houille Blanche*, vol. 1, 1964.
- YALIN M.S., *Theory of Hydraulic Models*, Macmillan, London, 1971