1. Modelli di infiltrazione

La precipitazione liquida che raggiunge il suolo penetra, almeno in parte, nella sua struttura superficiale ed inizia un processo di movimento dentro di esso che è chiamato infiltrazione, qualora questo si estrinsechi in una matrice non satura. Se il moto avviene in ambiente saturo si parla invece di filtrazione. In ogni caso il movimento è influenzato dal tipo di suolo e dalle sue caratteristiche, attraverso due caratteristiche idrauliche fondamentali: la conducibilità idraulica k [L/T] e la capacità di ritenzione di volume idrico per unità di volume di suolo C_s [-].

Fra le caratteristiche fisiche del suolo, la dimensione degli elementi che lo compongono gioca un ruolo fondamentale. A seconda della granulometria di tali elementi, si classificano gli stessi distinguendoli fra argilla (dimensione delle particelle dell'ordine dei 10^{-4} - 10^{-3} mm), limo (10^{-3} - 10^{-2} mm), sabbia (10^{-2} - 1 mm), ghiaia (1 - 100 mm). La granulometria determina la porosità del suolo e quindi influisce su k_s e C_s.

In un moto di filtrazione, il campo di velocità del fluido è estremamente eterogeneo, essendo la velocità stessa estremamente variabile nello spazio in dipendenza della posizione dei grani e dei canalicoli di scorrimento. Un'analisi puntuale di tale variabilità è quindi estremamente complessa e praticamente impossibile, in ragione della impossibilità di conoscere nel dettaglio la geometria del sistema. Di conseguenza, nell'analisi dei moti idrici subsuperficiali si introduce normalmente l'ipotesi di omogeneità all'interno di un volume di controllo sufficientemente piccolo, limitandosi quindi a studiare la velocità media (o la portata) del fluido che attraversa una superficie di area A normale alla direzione generale del movimento. Inoltre si assume che le traiettorie del fluido abbiano sensibilmente la stessa direzione e che quindi il moto appartenga alla categoria delle correnti. Poiché di norma le traiettorie hanno curvatura trascurabile, si può assumere che la corrente sia lineare e che quindi la distribuzione delle pressioni al suo interno segua la legge idrostatica. Tracciata una curva all'interno della regione di spazio nella quale si estrinseca il moto, che non sia una linea di corrente, le linee di corrente tangenti a tale curva definiscono i contorni del relativo *tubo di flusso*, la cui superficie laterale non è attraversata da particelle fluide [*Citrini & Noseda*, 1988]. La velocità media del fluido attraverso una sezione trasversale di quest'ultimo (ovvero una sezione perpendicolare in ogni suo punto alla direzione delle linee di corrente) viene detta *velocità di filtrazione*. Quest'ultima verrà indicata nel seguito con il simbolo v_s.

In ogni punto del campo di moto è possibile definire la quota piezometrica h [L], che sarà espressa dalla relazione

$$h = h_z + \frac{p}{\gamma} \quad , \tag{1}$$

dove h_z [L] rappresenta la quota del punto rispetto al piano orizzontale di riferimento rispetto al quale si misura h, p [M/(LT^2)] è la pressione del fluido in tale punto e γ [M/(L^{2}T^2)] è il peso specifico dell'acqua. Essendo il movimento lento e quindi la componente cinetica dell'energia trascurabile, ed assumendo che il fluido sia

incomprimibile, h è praticamente coincidente con l'energia H [L] per unità di peso del fluido nel punto considerato.
La relazione di base per la trattazione del moto idrico nel sottosuolo è la Legge di Darcy [*Citrini & Noseda*, 1987], la quale esprime un legame di proporzionalità diretta fra la velocità di filtrazione in un mezzo saturo e la perdita di energia subita dalla corrente liquida nel tubo di flusso durante il moto, ovvero

$$v_s = -k\frac{dH}{ds} = -k\frac{dh}{ds} \quad , \tag{2}$$

dove v_s [L/T] è la velocità media del flusso idrico nelle sezioni trasversali all'interno del tubo di flusso considerato (ovvero la velocità di filtrazione precedentemente introdotta) e ds [L] indica uno spostamento infinitesimo della corrente lungo la sua traiettoria. L'uguaglianza fra H e h è dovuta all'ipotesi di movimento lento precedentemente introdotta, la quale implica anche la proporzionalità diretta fra le perdite di energia e la velocità del fluido, poiché si può assumere che il moto sia laminare. La portata idrica veicolata dal tubo di flusso attraverso la sezione trasversale di area A si scrive

$$Q_s = -kA\frac{dh}{ds} \quad . \tag{3}$$

Nel terreno non saturo i processi di propagazione dei flussi idrici seguono una dinamica in parte diversa. La distribuzione dell'umidità del suolo al variare della profondità durante un evento di precipitazione che causa infiltrazione è schematicamente rappresentata nella Figura 1.1.

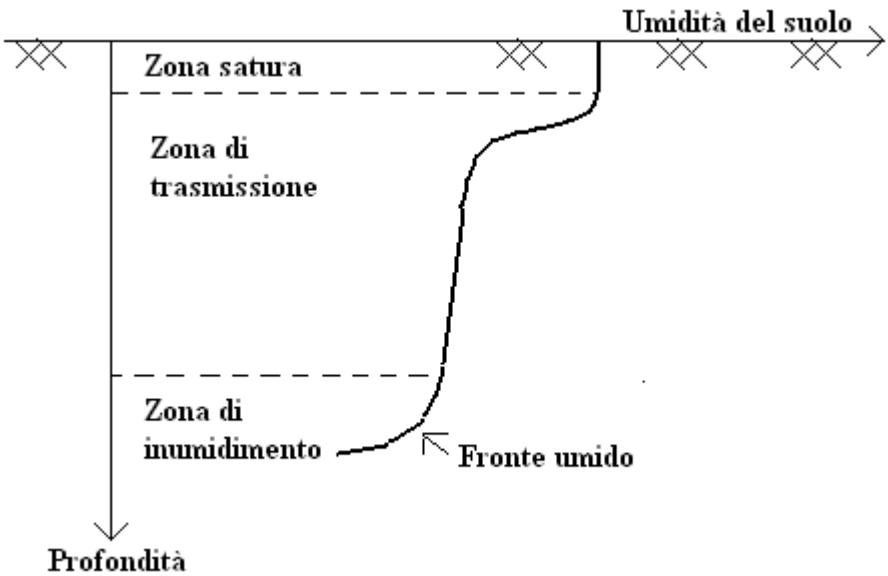

Figura 1.1. Rappresentazione schematica del profilo do umidità del suolo in condizioni non sature

Si può osservare la presenza di una zona satura nelle vicinanze della superficie. Tale zona satura si origina dopo un assegnato intervallo di tempo a partire dall'inizio dell'evento di precipitazione. All'aumentare della profondità si osserva una zona di trasmissione, nella quale si verifica flusso insaturo e l'umidità del suolo è caratterizzata da scarsa variabilità lungo la verticale; segue una zona di inumidimento, nella quale l'umidità decresce all'aumentare della profondità, la quale è confinata dal fronte umido, in corrispondenza del quale si ha una brusca variazione dell'umidità ed oltre il quale il suolo è pressoché asciutto.
Nel terreno non saturo è necessario introdurre modifiche alla Legge di Darcy per tenere conto della possibile presenza di moto bifasico (liquido-gassoso, per la presenza di aria) e di forze di ritenzione idrica capillare. Infatti, il mezzo poroso è composto da una matrice di particelle e dai vuoti che le inframmezzano. Qualora detti vuoti siano solo parzialmente riempiti di acqua, quest'ultima è attratta dalla superficie delle particelle da forze elettrostatiche che si sviluppano fra le molecole d'acqua e la superficie stessa. Questa adesione di superficie attira l'acqua verso i contorni secchi delle vie di deflusso, lasciando l'aria nel centro dei vuoti. Se il mezzo poroso assorbe un maggior quantitativo di acqua, l'area di superficie particellare libera si riduce, fino a che il mezzo poroso si satura. A quel punto non vi è più superficie delle particelle a contatto con aria e quindi non si esplica alcuna forza di ritenzione capillare. Nel caso in cui il movimento avvenga verso l'alto, la risalita di acqua nel mezzo poroso si verifica fino a che la forza di ritenzione capillare è bilanciata dalla forza di gravità.

1.1. L'equazione di Richards

L'altezza raggiunta da una particella fluida può essere interpretata come l'energia posseduta dal fluido stesso per unità di peso. In un mezzo poroso insaturo, la parte di energia posseduta dal fluido per effetto della ritenzione capillare si denomina *potenziale di ritenzione capillare* ψ [L], il quale è equivalente all'altezza di colonna d'acqua necessaria per equilibrare la forza di aspirazione che si origina per effetto della ritenzione medesima. In base alle considerazione tratte al termine della sezione precedente, ψ dipende dunque dall'umidità del terreno secondo un legame di proporzionalità inversa. In particolare, per uguali contenuti di acqua ψ può assumere diversi valori a seconda che il terreno si trovi in fase di umidificazione od essiccamento (fenomeno di isteresi). Una spiegazione di tale evidenza può essere dedotta considerando che durante la fase di essiccazione le forze di ritenzione capillare si oppongono al movimento del liquido, mentre nella fase di umidificazione lo favoriscono. La modellazione quantitativa di tale ciclo isteretico è oltremodo difficoltosa.
Per descrivere il moto vario di una corrente fluida in un mezzo insaturo conviene riferirsi ad un tubo di flusso della corrente stessa delimitato da due sezioni trasversali. La prima equazione costitutiva di un modello matematico che descriva tale moto può essere ricercata scrivendo una relazione di bilancio energetico.
In un mezzo poroso insaturo l'energia totale del fluido si ottiene sommando la quota piezometrica al potenziale di ritenzione capillare, ovvero

$$H = h + \psi \quad . \tag{4}$$

Sostituendo nella (2) e assumendo che il moto si esplichi nella direzione verticale (assunzione attendibile nel caso di terreno insaturo), quindi lungo la coordinata z positiva verso l'alto, si ottiene

$$v_z = -k\frac{\partial(h+\psi)}{\partial z} \quad , \tag{5}$$

dove v_z indica la componente della velocità nella direzione verticale. Sviluppando:

$$v_z = -k\left(\frac{dh}{dz} + \frac{d\psi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad , \tag{6}$$

dove θ indica l'umidità del suolo, ovvero il rapporto fra il volume di acqua e il volume totale del tubo di flusso. La derivata totale per il carico piezometrico si giustifica considerando che la pressione è distribuita con legge idrostatica. Sviluppando si ottiene:

$$v_z = -k - k\frac{d\psi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\left(k + D\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad , \tag{7}$$

dove $D = k(d\psi/d\theta)$ [L^2/S] è chiamata diffusività dell'acqua nel suolo.
Una ulteriore equazione costitutiva può essere ricercata imponendo la condizione di bilancio della massa idrica. Applicando l'equazione di bilancio di massa al volume di controllo V costituito dal tubo di flusso subsuperficiale delimitato da due sezioni trasversali precedentemente introdotto si ottiene

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_w\theta dV + \int_A \rho_w v_z dA = 0 \quad , \tag{8}$$

dove ρ_w è la densità di massa dell'acqua e A è la superficie totale delle sezioni trasversali di ingresso ed uscita della corrente nel tubo di flusso di volume V, che per le ipotesi fatte giacciono su piani orizzontali. Il primo termine della (8) esprime la variazione nel tempo della massa liquida immagazzinata nel volume di controllo. Nel caso ci si riferisca ad un elemento fluido di volume infinitesimo, ρ_w può essere assunto costante e quindi la (8) può essere espressa come

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_w\theta dV = \frac{d}{dt}(\rho_w\theta\, dx\,dy\,dz) = \rho_w\, dx\,dy\,dz\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad , \tag{9}$$

nella quale la derivata parziale è stata introdotta poiché la derivata totale della massa fluida contenuta in $dxdydz$ dipende da θ che varia sia nel tempo che nello spazio.
Il secondo termine della (8) considera il flusso netto di acqua attraverso la superficie del volume di controllo, ovvero

$$\int_A \rho_w v_z dA = \rho_w\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz\right)dx\,dy - \rho_w v_z\, dx\,dy = \rho_w\, dx\,dy\,dz\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad , \tag{10}$$

Sostituendo la (9) e la (10) nella (8) e dividendo per $\rho_w dxdydz$ si ottiene

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad . \tag{11}$$

Combinando le due equazioni costitutive (7) e (11) si ha

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k + D\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad , \tag{12}$$

che rappresenta la forma monodimensionale dell'*equazione di Richards* [1931], ovvero l'equazione del moto vario in un mezzo poroso insaturo, nell'incognita θ.
L'integrazione della (12) pone numerosi problemi operativi, dovuti alla necessità di specificare le condizioni iniziali di θ nonché le condizioni al contorno, ovvero tipicamente il volume di acqua disponibile per infiltrazione alla superficie e la conducibilità idraulica nella sezione delimitante il tubo di flusso nel sottosuolo. Per ovviare a tali problemi, sono stati introdotti da diversi autori approcci semplificati per il calcolo dell'infiltrazione. In taluni casi si tratta di approcci puramente empirici; in altri casi si tratta di semplificazioni dell'equazione di Richards.

1.2. Il Modello di Horton

Il Modello di Horton è stato sviluppato dal famoso idrologo Robert E. Horton [*Beven*, 2004a; 2004b], che operò negli Stati Uniti nei primi anni del ventesimo secolo. Horton, mediante prove sperimentali nel proprio laboratorio, osservò che qualora fosse disponibile un volume idrico in superficie superiore al tasso di infiltrazione $f(t)$, allora $f(t)$stesso variava da un valore iniziale f_0 al valore a regime f_c, che veniva raggiunto con legge esponenziale decrescente, ovvero

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-rt} \quad , \tag{13}$$

dove r [1/T] è una costante di decadimento.
Eagleson [1970] e *Raudkivi* [1979] hanno dimostrato che il Modello di Horton può essere derivato dall'equazione di Richards espressa dalla (12), assumendo che k e D siano costanti e quindi indipendenti dall'umidità del suolo θ. Sotto queste assunzioni la (12) si scrive

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad , \tag{14}$$

e assume quindi la forma classica dell'equazione diffusiva, la quale può essere risolta ottenendo la variazione di θ lungo z e nel tempo. L'equazione di Horton si ottiene risolvendo la (14) per ricavare il termine $D\partial\theta/\partial z$ in corrispondenza della superficie del suolo.

Il metodo di Horton è un approccio a scala di evento, poiché non permette di simulare la dinamica del processo di infiltrazione nei periodi di tempo asciutto.

1.3. Il metodo del Soil Conservation Service – Curve Number

Il metodo del *Soil Conservation Service* [1972], denominato metodo *Curve Number*, è indicato spesso con l'acronimo SCS-CN. E' stato concepito con l'intento di sviluppare uno strumento di valenza pratica, la cui applicazione non richiedesse la conoscenza delle caratteristiche di dettaglio del terreno. Infatti, l'equazione di Richard, ma anche il metodo di Green-Ampt, richiedono la specifica di parametri del suolo che non sempre sono disponibili.
Il metodo SCS-CN rinuncia ad una descrizione fisicamente basata del processo di infiltrazione per rifarsi ad una schema concettuale a serbatoio, sinteticamente rappresentato in Figura 1.2.

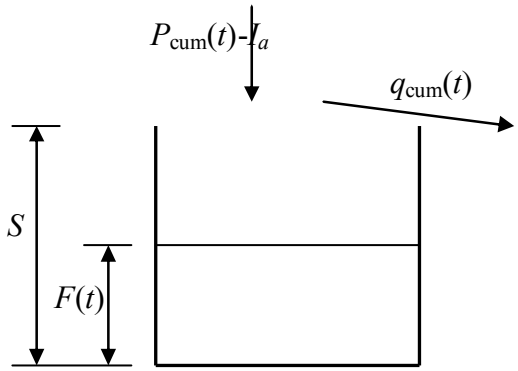

Figura 1.2. Rappresentazione schematica del modello di infiltrazione SCS – CN

Ad un generico istante t, la pioggia lorda, ovvero l'altezza di pioggia cumulata dall'istante $t = 0$ che raggiunge la sommità della vegetazione, si indica con il simbolo $P_{cum}(t)$ [L]. I_a [L] rappresenta la quota parte di sollecitazione meteorica trattenuta per effetto dell'intercettazione. $F(t)$ e q_{cum}(t) [L] indicano l'infiltrazione cumulata ed il deflusso superficiale cumulato al tempo t, espresso come volume idrico per unità di superficie del bacino idrografico, mentre S [L] è la massima capacità di ritenzione idrica del terreno.
La prima equazione costitutiva del metodo SCS – CN è una relazione di natura puramente empirica che permette di calcolare il deflusso superficiale, ovvero

$$\frac{q_{cum}(t)}{P_{cum}(t) - I_a} = \frac{F(t)}{S} \quad . \tag{15}$$

Si può osservare che all'inizio dell'evento, quando $F(t) = 0$,il deflusso superficiale è nullo. Invece, qualora l'infiltrazione cumulata eguagli la massima capacità di ritenzione del terreno S, il deflusso superficiale eguaglia la pioggia lorda depurata dell'intercettazione.
La seconda equazione costitutiva del metodo SCS – CN esprime il bilancio della massa idrica nel bacino idrografico, ovvero

$$F(t) = P_{\text{cum}}(t) - I_a - q_{\text{cum}}(t) \quad . \tag{16}$$

Combinando la (15) e la (16) si ottiene

$$\frac{q_{\text{cum}}(t)}{P_{\text{cum}}(t) - I_a} = \frac{P_{\text{cum}}(t) - I_a - q_{\text{cum}}(t)}{S} \quad , \tag{17}$$

dalla quale si ricava

$$q_{\text{cum}}(t) = \frac{[P_{\text{cum}}(t) - I_a]^2}{P_{\text{cum}}(t) - I_a + S} \quad . \tag{18}$$

Per applicare la (18) è necessario specificare i parametri S e Ia. Innanzitutto, il metodo ipotizza che $I_a = 0.2\,S$, sicchè la (18) si può scrivere nella forma

$$q_{\text{cum}}(t) = \frac{[P_{\text{cum}}(t) - 0.2S]^2}{P_{\text{cum}}(t) + 0.8S} \quad . \tag{19}$$

Il Soil Conservation Service [1972] ha proposto un metodo per la stima di S, che fa uso della relazione

$$S = 254\left(\frac{100}{\text{CN}} - 1\right) \quad . \tag{20}$$

nella quale S è espresso in mm e il parametro CN, che può assumere valori compresi fra 0 e 100, è tabellato in funzione dell'uso del suolo, dell'attitudine del terreno ad assorbire acqua e della pioggia caduta nei 5 giorni precedenti. I valori del parametro CN sono stati ottenuti realizzando un'estensiva campagna di misure sperimentali negli Stati Uniti d'America.
Nel dettaglio, le tabelle proposte dal SCS prevedono una vasta varietà di possibili usi del suolo, che permettono di ricavare una prima stima del CN in funzione del tipo di suolo, che viene distinto in 4 categorie; ovvero:

A) suoli ad elevato potenziale di infiltrazione (ad esempio sabbie profonde, suoli ad elevato contenuto di sostanza organica);
B) suoli a moderato potenziale di infiltrazione (ad esempio sabbie limose);
C) suoli a basso potenziale di infiltrazione (ad esempio limi argillosi, limi sabbiosi poco profondi, suoli a basso contenuto di sostanza organica);
D) suoli a potenziale di infiltrazione trascurabile (ad esempio argille plastiche, suoli salini, suoli impermeabili).

Un esempio di stima del parametro CN è riportato in Tabella 1.1.

Uso del suolo	Tipo di suolo			
	A	B	C	D
Coltivazioni ben curate	62	71	78	81
Coltivazioni non curate	72	81	88	91

Pascoli in buone condizioni	39	61	74	80
Pascoli in cattive condizioni	68	79	86	89
Boschi o foreste con buona copertura	25	55	70	77
Aree commerciali (pavimentate al 85%)	89	92	94	95
Parcheggi, tetti, etc.	98	98	98	98

Tabella 1.1. Esempio di tabella per la stima del parametro CN

Come in precedenza menzionato, il metodo SCS – CN prevede di classificare la condizioni di umidità del suolo precedenti all'evento in 3 categorie, ovvero:

1) AMC (antecedent misture condition) I, qualora la pioggia nei 5 giorni precedenti sia inferiore 12.7 mm nella stagione di riposo vegetativo e 35.6 mm nella stagione di vegetazione attiva;
2) AMC II, qualora la pioggia sia compresa fra 12.7 e 27.9 nella stagione di riposo oppure fra 35.6 e 53.3 nella stagione attiva;
3) AMC III, per pioggia maggiore di 27.9 oppure 53.3 nelle stagioni, rispettivamente, di riposo ed attiva.

I valori del parametro CN ricavati dalle tabelle sono riferiti alla condizione AMC II. I corrispondenti valori di AMC I e AMC III si ottengono dalle relazioni:

$$\mathrm{CN}(\mathrm{I}) = \frac{\mathrm{CN}(\mathrm{II})}{2.3 - 0.013\,\mathrm{CN}(\mathrm{II})}\ , \tag{21}$$

$$\mathrm{CN}(\mathrm{III}) = \frac{\mathrm{CN}(\mathrm{II})}{0.43 + 0.0057\,\mathrm{CN}(\mathrm{II})}\ . \tag{22}$$

Il metodo SCS – CN presenta l'indubbio vantaggio della praticità di utilizzo. Tuttavia, si possono osservare numerose limitazioni a questo tipo di approccio. Innanzitutto occorre osservare che le tabelle per la stima del CN sono state derivate da prove sperimentali eseguite negli Stati Uniti. La loro applicazione ad altri contesti potrebbe condurre a risultati incerti. Inoltre, la definizione dell'uso e del tipo di suolo lascia spazio ad un margine di soggettività. Inoltre, alcuni studiosi osservano che ogni metodo di stima dell'infiltrazione dovrebbe prevedere di raggiungere a regime una situazione nella quale l'infiltrazione stessa è governata dalla conducibilità idraulica del suolo. In particolare, può risultare inadeguata l'assunzione che l'altezza di infiltrazione F non possa eccedere la massima capacità di ritenzione idrica del terreno S.

Anche il metodo SCS – CN, come i metodi di Horton e Green – Ampt, è un metodo a scala di evento, poiché non prevede la simulazione della dinamica del contenuto idrico del suolo in periodi asciutti. Quest'ultima prerogativa può oggi costituire un limite significativo, poiché la disponibilità sempre crescente di mezzi di calcolo permette di effettuare simulazioni di lunga durata, che si estendono anche per decine di anni, che sono di grande utilità nella messa a punto di tecniche per le gestione delle risorse idriche.

***Esercizio* 1*: applicazione del metodo* CN**

Applicando il metodo SCS – CN si calcoli l'altezza di deflusso superficiale prodotta da due eventi di precipitazione consecutivi. Il primo evento, osservato in data 15

febbraio, è accaduto dopo un periodo di tempo asciutto pari a 13 giorni ed ha prodotto un'altezza di precipitazione pari a 108.2 mm. Nel corso del secondo evento, osservato in data 18 febbraio, sono caduti 141.6 mm di pioggia.
Il bacino idrografico è costituito da pascoli in buone condizioni e suolo che può essere classificato di tipo B.

Soluzione: le tabelle del SCS (si veda la tabella 1.1) porgono per il bacino in studio un valore di CN(II) pari a 61. Di conseguenza, si possono calcolare i valori del CN per le altre classi AMC con le relazioni (21) e (22), ovvero

$$\mathrm{CN(I)} = \frac{\mathrm{CN(II)}}{2.3 - 0.013\,\mathrm{CN(II)}} = \frac{61}{2.3 - 0.013 \cdot 61} = 40 \quad ,$$

$$\mathrm{CN(III)} = \frac{\mathrm{CN(II)}}{0.43 - 0.0057\,\mathrm{CN(II)}} = \frac{61}{0.43 + 0.0057 \cdot 61} = 78 \quad .$$

Indicato con T l'istante di tempo al termine del primo evento, si ottiene:

$$S = 254\left(\frac{100}{40} - 1\right) = 381 \text{ mm};$$

$$q_{\mathrm{cum}}(T) = \frac{(108.2 - 0.2 \cdot 381)^2}{108.2 + 0.8 \cdot 381} = 2.5 \text{ mm}.$$

Il coefficiente di deflusso dell'evento è pari a:

$$\phi = \frac{2.5}{108.2} = 0.023 \quad .$$

Indicato con T' l'istante di tempo al termine del secondo evento, che si verifica in condizioni AMC III, si ottiene:

$$S = 254\left(\frac{100}{78} - 1\right) = 72 \text{ mm};$$

$$q_{\mathrm{cum}}(T') = \frac{(141.6 - 0.2 \cdot 72)^2}{141.6 + 0.8 \cdot 72} = 81.2 \text{ mm}.$$

Il coefficiente di deflusso dell'evento è pari a:

$$\phi = \frac{81.2}{141.6} = 0.57 \quad .$$

Si osservi la variabilità del coefficiente di deflusso al variare dell'intensità di precipitazione e della condizione di umidità precedente.